ergibt. Damit ist gezeigt, daß die Funktionen Φ'', f'' den Zählausdruck A in $\mathfrak{Z}$ erfüllen. Die Zählausdrücke A und B sind also gleichwertig und der Satz 43 bewiesen.

Bezeichnet man mit C den Zählausdruck, welcher aus B entsteht, indem man für $\Phi(x,y,z)$ allenthalben $R_1(x,y)\,\&\,R_2(x,z)$ einsetzt, so ist C mit den beiden Zählausdrücken A,B gleichwertig. Es genügt natürlich nur zu zeigen, daß B mit C gleichwertig ist.

Ist der Zählausdruck B erfüllbar, so hat er — wie bereits gezeigt — ein solches Erfüllungssystem F',Φ',f' im Bereich der natürlichen Zahlen, für welches (89) gilt. Aus (89) folgt aber leicht das Bestehen von $(x)(y)(z)(u)(v)[\Phi'(x,y,u)\,\&\,\Phi'(x,v,z)\to\Phi'(x,y,z)]$, und daher läßt sich die Funktion $\Phi'(x,y,z)$ wegen des Satzes 4 aus $\boldsymbol{P}_1$ in der Form $R_1'(x,y)\,\&\,R_2'(x,z)$ darstellen. Die Funktionen F',R_1',R_2',f' erfüllen dann offensichtlich den Zählausdruck C in $\mathfrak{Z}$.

Ist umgekehrt der Zählausdruck C erfüllbar und F'',R_1'',R_2'',f'' irgend ein Erfüllungssystem von C in irgend einem Individuenbereich, so erfüllen die Funktionen $F'',R_1''(x,y)\,\&\,R_2''(x,z),f''$ offenbar den Zählausdruck B in demselben Individuenbereich.

Die Zählausdrücke B,C sind also tatsächlich gleichwertig.

Da der Zählausdruck C nur die Funktionsvariablen F,R_1,R_2,f enthält, die zwei- und einstellig sind, so haben wir auch den

Satz 44. *Beim Erfüllbarkeitsproblem darf man sich auf binäre Zählausdrücke in der Ackermannschen Form*

$$(y)(Ez)F(y,z)\,\&\,(Ex)(u_1)(u_2)\ldots(u_n)\mathfrak{U}(x,u_1,u_2,\ldots,u_n)$$

beschränken, die außer der zweistelligen Funktionsvariablen F nur noch zwei zweistellige und eine einstellige Funktionsvariable enthalten.

Sur les fonctions indépendantes II.

Par

J. Marcinkiewicz (Wilno).

1. MM. W. Feller[1]) et P. Lévy[2]) ont trouvé des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une suite de variables aléatoires indépendantes satisfasse à la loi de grands nombres ou à celle de Gauss. Les démonstrations des ces résultats importants donneés par ces deux auteurs sont bien différentes, mais il est très remarquable que, dans chacune d'elles, l'idée principale est la même pour la loi de grands nombres et celle de Gauss.

Il me semble que cela s'explique par le fait que ces résultats sont des conséquences particulières d'un principe général contenu dans le théorème suivant que j'ai démontré dans la première partie de cet ouvrage[3]):

Théorème A. *Etant donné pour chaque n un système de fonctions indépendantes $x_{n,1},x_{n,2},x_{n,3},\ldots$, pour que les distribuantes des sommes $\sum_\nu x_{n,\nu}$ convergent vers une fonction $V(x)$ jouissant d'une fonction caractéristique entière, il faut et il suffit que l'on ait:*

$$\sum_\nu \left|\mathop{\mathrm{E}}_t\left(|X_{n,\nu}-\lambda_{n,\nu}|\geqslant K_n\right)\right|\to 0, \tag{1.1}$$

$$\int_0^1 \Big(\sum_\nu x'_{n,\nu}\Big)^k dt \to \int_{-\infty}^{+\infty} x^k\, dV(x) \qquad (k=1,2,\ldots) \tag{1.2}$$

où les nombres $K_1,K_2,\ldots$ sont des constantes convenables, $\lambda_{n,\nu}$ satisfont aux inégalités:

$$\left|\mathop{\mathrm{E}}_t(x_{n,\nu}\geqslant\lambda_{n,\nu})\right|\geqslant 1/2, \qquad \left|\mathop{\mathrm{E}}_t(x_{n,\nu}\leqslant\lambda_{n,\nu})\right|\geqslant 1/2$$

et $x'_{n,\nu}$ sont définis par la condition:

$$x'_{n,\nu}=\begin{cases} x_{n,\nu} & \textit{lorsque } |x_{n,\nu}|\leqslant K_n,\\ 0 & \textit{lorsque } |x_{n,\nu}|> K_n,\end{cases}$$

---

[1]) Feller [1], [2].

[2]) Lévy [1], [2], en particulier p. 107.

[3]) Cf. ce volume, p. 209.

Je vais montrer qu'en utilisant ce théorème, on peut obtenir les résultats de MM. W. Feller et P. Lévy d'une façon assez simple.

Dans tout ce qui suit, il s'agit donc plutôt de la méthode que de la généralité des résultats. C'est seulement à l'occasion de la loi de Poisson que je développe l'argumentation d'une manière plus large. J'ai choisi la loi de Poisson parce qu'elle est très connue, mais il me semble que la méthode s'applique à l'étude d'une classe assez vaste de lois limites.

2. Nous allons nous occuper d'abord de la loi de grands nombres.

Théorème 1 [4]. *Soient $x_1, x_2, \ldots$ des fonctions indépendantes telles que*

$$|\underset{t}{\mathrm{E}}(x_\nu \geqslant 0)| \geqslant 1/2, \qquad |\underset{t}{\mathrm{E}}(x_\nu \leqslant 0)| \geqslant 1/2, \tag{2.1}$$

et $\{a_n\}$ une suite croissante, convergente vers l'infini. Pour qu'il existe alors une suite $\{b_n\}$ telle que

$$\frac{1}{a_m}\sum_1^n (x_\nu - b_\nu) \tag{2.2}$$

converge en mesure vers 0, il faut et il suffit que l'on ait:

$$\sum_\nu |\underset{t}{\mathrm{E}}(|x_\nu| \leqslant a_n)| \to 0, \tag{2.3}$$

$$\frac{1}{a_n^2}\sum_\nu \int x_{n,\nu}^2\, dt \to 0, \tag{2.4}$$

où

$$x_{n,\nu} = \begin{cases} x_\nu & si \quad |x_\nu| \leqslant a_n \\ 0 & si \quad |x_\nu| > a_n. \end{cases}$$

On voit d'abord que ces conditions sont suffisantes. En effet, d'après (2.2), l'expression

$$\frac{1}{a_n}\sum_\nu (x_{n,\nu} - \Delta_{n,\nu}) \qquad \text{où} \qquad \Delta_{n,\nu} = \int_0^1 x_{n,\nu}\, dt,$$

converge en mesure vers 0. Pour en tirer la conclusion qu'il en est de même de l'expression (2.2), il suffit de s'appuyer sur le

[4]) Ce théorème est dû à M. W. Feller, (voir Feller [1], cf. aussi Lévy [1]).

Lemme. *Sous les conditions (2.3) et (2.4), on a:*

$$\frac{1}{a_n}\sum_\nu |\Delta_{n,\nu} - b_\nu| \to 0, \qquad b_\nu = \int_0^1 x_{n,\nu}\, dt.$$

Ce lemme est connu; il est dû à M. W. Feller [5]).

Réciproquement, supposons que la suite (2.2) converge en mesure vers 0. Désignons par $\bar{x}_\nu$ la fonction équimesurable avec $-x_\nu$. D'après le th. A, nous pouvons supposer que

$$\frac{1}{a_n^2}\int_0^1 \Big[\sum_\nu (x_{n,\nu} + x'_{n,\nu})\Big]^2 dt \to 0, \tag{2.5}$$

la définition de $x'_{n,\nu}$ étant analogue à celle de $x_{n,\nu}$.

Désignons par A et B les ensembles où la fonction $x_{n,\nu}$ est respectivement non-négative et non-positive, et par A' et B' les ensembles correspondants pour la fonction $x'_{n,\nu}$. On a alors:

$$\int_{AA'} (x_{n,\nu} + x'_{n,\nu})^2\, dt \geqslant |A'| \int_A x_{n,\nu}^2\, dt,$$

$$\int_{BB'} (x_{n,\nu} + x'_{n,\nu})^2\, dt \geqslant |B'| \int_B x_{n,\nu}^2\, dt,$$

ce qui donne facilement

$$\int_0^1 (x_{n,\nu} + x'_{n,\nu})^2\, dt \geqslant \int_0^1 x_{n,\nu}^2\, dt.$$

En tenant compte de (2.3), il vient

$$\frac{1}{a_n^2}\sum_\nu \int_0^1 x_{n,\nu}^2 \to 0.$$

On en déduit facilement les conditions (2.3) et (2.4), qui sont par conséquent nécessaires.

[5]) Feller [1].

3. Passons à la loi de Gauss.

Théorème 2 [6]**).** *Soient* $x_1, x_2, x_3, \dots$ *des fonctions indépendantes satisfaisant aux conditions* (2.1) *et*

$$\max_{1\leqslant\nu\leqslant n} \left|\underset{t}{\mathrm{E}}\,(|x_\nu|\geqslant \varepsilon\, a_n)\right| \to 0 \qquad (\varepsilon>0), \tag{3.1}$$

la suite des nombres a_n *croissant vers l'infini. Pour que la distribuante de la somme*

$$\frac{1}{a_n}\sum_\nu x_\nu$$

tende vers la fonction

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du,$$

il faut et il suffit que l'on ait pour tout $\varepsilon>0$:

$$\sum_1^n \left|\underset{t}{\mathrm{E}}\,(|x_\nu|\geqslant \varepsilon a_n)\right| \to 0, \tag{α}$$

$$\frac{1}{a_k^2}\left[\sum_1^n \int_0^1 x_{n,\nu}^2\,dt - \sum_1^n \left(\int_0^1 x_{n,\nu}\,dt\right)^2\right] \to 1, \tag{β}$$

$$\frac{1}{a_n}\sum_1^n \int_0^1 x_{n,\nu}\,dt \to 0, \tag{γ}$$

où

$$x_{n,\nu}=x_{n,\nu}^{\varepsilon}=\begin{cases} x_\nu, & \textit{lorsque} \quad |x_\nu|\leqslant \varepsilon\, a_n \\ 0, & \textit{lorsque} \quad |x_\nu|>\varepsilon a_n.\end{cases}$$

Nous allons montrer d'abord que ces conditions sont nécessaires. En vertu du th. A, nous pouvons admettre, pour fonctions $x_{n,\nu}$ convenablement choisies, que

$$\int_0^1 \left[\frac{1}{a_n}\sum x_{n,\nu}\right]^k dt \to M_k, \qquad \sum_1^n \left|\underset{t}{\mathrm{E}}\,(x_\nu \neq x_{n,\nu})\right| \to 0, \tag{3.2}$$

où M_k désigne le k-ième moment de la loi de Gauss.

[6]) Ce théorème est dû à MM. Lévy et Feller (voir Feller [1], Lévy [1]; cf. aussi Lévy [2], en particulier p. 107.

Supposons d'abord les fonctions $x_{n,\nu}$ symétriques. On conclut de (3.2) que

$$\frac{1}{a_n^2}\sum_\nu \int_0^1 x_{n,\nu}^2\,dt \to 1, \tag{3.3}$$

$$\frac{1}{a_n^4}\sum_\nu \int_0^1 x_{n,\nu}^4\,dt \to 0. \tag{3.4}$$

Supposons ensuite les fonctions $x_{n,\nu}$ arbitraires et soit $x'_{n,\nu}$ la fonction équimesurable avec $-x_{n,\nu}$. Les fonctions $x_{n,1}, x'_{n,1}, x_{n,2}, x'_{n,2}, \dots$ étant indépendantes, la distribuante de la somme

$$\frac{1}{a_n}\sum_\nu (x_{n,\nu}+x'_{n,\nu})$$

tend vers la fonction $\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$. Les formules (3.3) et (3.4) donnent:

$$\frac{1}{a_n^2}\sum_1^n \int_0^1 (x_{n,\nu}+x'_{n,\nu})^2\,dt \to 2, \qquad \frac{1}{a_n^4}\sum_1^n \int_0^1 (x_{n,\nu}+x'_{n,\nu})^4\,dt \to 0,$$

d'où l'on déduit facilement:

$$\frac{1}{a_n^2}\sum_1^n \int_0^1 x_{n,\nu}^2\,dt - \frac{1}{a_n^2}\sum_1^n \left(\int_0^1 x_{n,\nu}\,dt\right)^2 \to 1, \tag{3.5}$$

$$\frac{1}{a_n^4}\sum_1^n \int_0^1 x_{n,\nu}^4\,dt \to 0. \tag{3.6}$$

La dernière inégalité entraîne que

$$\frac{1}{a_n^2}\sum_1^n \int_{|x_{n,\nu}|\geqslant \eta a_n} x_{n,\nu}^2\,dt \to 0, \qquad \frac{1}{a_n}\sum_1^n \int_{|x_{n,\nu}|\geqslant \eta a_n} |x_{n,\nu}|\,dt \to 0,$$

ce qui, comparé avec (3.2) écrit pour $k=1$, donne les formules (α), (γ) et, en vertu de (3.5), aussi la formule (β).

Pour établir la suffisance de ces conditions, on peut utiliser p. ex. la méthode de fonctions caractéristiques de M. P. Lévy.

On peut montrer aussi que les conditions (γ), (β), (γ), entraînent les hypothèses du th. A, ce que nous laissons au lecteur.

4. Soit $x_{n,\nu}$ une variable aléatoire admettant la valeur 1 avec la probabilité $\eta_{n,\nu}$ et la valeur 0 avec la probabilité $1-\eta_{n,\nu}$. Supposons que

$$\sum_\nu \eta_{n,\nu} \to 1, \tag{4.1}$$

$$\max_\nu \eta_{n,\nu} \to 0. \tag{4.2}$$

La loi dont dépend la somme

$$\sum_\nu x_{n,\nu} \tag{4.3}$$

tend vers une loi qui s'appelle *loi de Poisson* [7]).

Une variable aléatoire ξ dépendant de la loi de Poisson n'admet que des valeurs entières non-négatives. Sa fonction caractéristique est

$$e^{e^{i\theta}-1};$$

elle est donc entière.

On peut poser la question suivante: étant donné, pour tout n, un système $x_{n,1}, x_{n,2}, x_{n,3}, \dots$ de variables aléatoires indépendantes, quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que la loi dont dépend la somme (4.3) tende vers la loi de Poisson? Nous y répondons par le théorème que nous préférons formuler en termes de fonctions indépendantes. La traduction en langage de la théorie des probabilités n'offre aucune difficulté.

Théorème 3. *Soit donné pour chaque n un système de fonctions indépendantes $x_{n,1}, x_{n,2}, x_{n,3}, \dots$ satisfaisant pour tout $\varepsilon>0$ à la condition:*

$$\max_\nu |\underset{t}{\mathrm{E}}(|x_{n,\nu}|>\varepsilon)| \to 0. \tag{4.4}$$

Posons:

$$A_{n,\nu}=A^\varepsilon_{n,\nu}=\underset{t}{\mathrm{E}}(|x_{n,\nu}|<\varepsilon), \qquad B_{n,\nu}=B^\varepsilon_{n,\nu}=\underset{t}{\mathrm{E}}[1+\varepsilon>x_{n,\nu}>1-\varepsilon];$$

$$C_{n,\nu}=C^\varepsilon_{n,\nu}=C(A_{n,\nu}+B_{n,\nu}); \qquad S_n=\sum_\nu x_{n,\nu}$$

et désignons par $V_n(x)$ la distribuante de la somme S_n.

[7]) Pour la loi de Poisson, voir p. ex. Lévy [2].

Alors, pour que V_n tende vers la loi de Poisson, il faut et il suffit que l'on ait pour tout $\varepsilon>0$:

$$\sum_\nu |C_{n,\nu}| \to 0, \tag{4.5}$$

$$\sum_\nu |B_{n,\nu}| \to 1, \tag{4.6}$$

$$\sum_\nu \int_{A_{n,\nu}} x_{n,\nu}\,dt \to 0, \tag{4.7}$$

$$\sum_\nu \int_{A_{n,\nu}} (x_{n,\nu}-\Delta_{n,\nu})^2\,dt \to 0 \quad \text{où} \quad \Delta_{n,\nu}=\int_{A_{n,\nu}} x_{n,\nu}\,dt. \tag{4.8}$$

La démonstration de ce théorème sera composée d'une série de lemmes.

Lemme 1. *Les conditions* (4.5)–(4.8) *sont suffisantes.*

Considérons la fonction

$$z_{n,\nu}=\begin{cases} x_{n,\nu} & \text{si } |x_{n,\nu}|\leqslant\varepsilon \\ 0 & \text{si } |x_{n,\nu}|>\varepsilon. \end{cases}$$

On a d'après (4.7) et (4.8):

$$\sum_\nu \int_0^1 z_{n,\nu}\,dt \to 0, \quad \sum \int_0^1 (z_{n,\nu}-\Delta_{n,\nu})^2\,dt \to 0 \quad \text{où} \quad \Delta_{n,\nu}=\int_0^1 z_{n,\nu}\,dt,$$

ce qui donne facilement

$$\int_0^1 \left(\sum z_{n,\nu}\right)^2 dt \to 0.$$

Il en résulte que la somme $\sum_\nu z_{n,\nu}$ est négligeable. Nous pouvons donc admettre d'après (4.5) que l'on a soit $x_{n,\nu}=0$, soit $|x_{n,\nu}-1|\leqslant\varepsilon$ où $\varepsilon_n\to 0$. Il vient:

$$\sum_\nu \int_0^1 x^k_{n,\nu}\,dt \to 1 \qquad (k=1,2,3,\dots), \tag{4.9}$$

$$\max_\nu \int_0^1 |x_{n,\nu}|^k\,dt=\max_\nu \int_0^1 x^k_{n,\nu}\,dt \to 0. \tag{4.10}$$

Nous allons prouver maintenant que

$$\int_0^1 \left(\sum_t x_{n,\nu}\right)^k dt \to C_k \qquad (k=1,2,3,\dots), \tag{4.11}$$

C_k désignant le k-ième moment de la loi de Poisson.

Pour $k=1,2$ c'est immédiat, car pour $k=1$ le les formules (4.9) et (4.11) sont les mêmes et pour $k=2$ on a

$$\int_0^1 \Big(\sum_\nu x_{n,\nu}\Big)^2 dt = \sum \int_0^1 x_{n,\nu}^2\, dt + \sum_{i_1 \neq i_2} \int_0^1 x_{n,i_1}\, dt \int_0^1 x_{n,i_2}\, dt =$$

$$= \Big\{\sum \int_0^1 x_{n,\nu}\, dt\Big\}^2 + \sum \int_0^1 x_{n,\nu}^2\, dt - \sum \Big\{\int_0^1 x_{n,\nu}\, dt\Big\}^2 = 2 + o(1).$$

Pour $k>2$, le calcul devient plus compliqué, mais l'idée directrice reste très simple. En supprimant l'index n, on a

$$\int_0^1 \Big(\sum x_\nu\Big)^k dt = \sum B \int_0^1 x_{i_1}^{\alpha_1} dt \int_0^1 x_{i_2}^{\alpha_2} dt \int_0^1 x_{i_3}^{\alpha_3} dt \dots \int_0^1 x_{i_k}^{\alpha_k} dt,$$

où B désignent les coefficients de Newton, $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = k$ et $i_1 \neq i_2 \neq i_3 \neq i_4 \neq \dots \neq i_k$.

Soit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ une décomposition fixée du nombre k. Désignons par $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_l$ ceux des nombres $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_k$ qui sont positifs. Nous allons prouver que

(4.12) $$\sum \int_0^1 x_{i_1}^{\alpha_1} dt \int_0^1 x_{i_2}^{\alpha_2} dt \dots \int_0^1 x_{i_k}^{\alpha_k} dt = \prod_{i=1}^{l} \Big(\sum_\nu \int_0^1 x_\nu^{\beta_i}\Big) + o(1).$$

En effet, en développant le membre droit de la dernière formule, on trouve

$$\prod_{i=1}^{e} \Big(\sum_\nu \int_0^1 x_\nu^{\beta_i} dt\Big) = \sum_{i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_l} \int_0^1 x_{i_1}^{\beta_1} dt \int_0^1 x_{i_2}^{\beta_2} dt \dots \int_0^1 x_{i_l}^{\beta_l} dt + C,$$

où C désigne la somme des termes de la forme

(4.13) $$B \Big\{\int_0^1 x_{i_1}^{\beta_1} dt\Big\}^{\gamma_1} \Big\{\int_0^1 x_{i_2}^{\beta_2} dt\Big\}^{\gamma_2} \dots \Big\{\int_0^1 x_{i_l}^{\beta_l} dt\Big\}^{\gamma_l},$$

les nombres $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_l$ étant des entiers tels que l'on a $\gamma_1\beta_1 + \gamma_2\beta_2 + \dots + \gamma_l\beta_l = k$ et que $\gamma_i > 1$ au moins pour un i. D'après (4.4) et tous les x_i étant uniformément bornés, on conclut que

$$\max_\nu \int_0^1 x_{n,\nu}^s\, dt \to 0 \qquad (s>0).$$

Il en résulte que chaque terme de (4.13) est de la forme

$$o\Big\{\int_0^1 x_{i_1}^{\delta_1} dt \int_0^1 x_{i_2}^{\delta_2} dt \dots \int_0^1 x_{i_j}^{\delta_j} dt\Big\},$$

où $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_j$ désignent les β_i positifs.

Or, la somme de tous les termes avec les $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_j$ fixés ne surpasse évidemment pas

$$\prod_{i=1}^{j} \Big(\sum_\nu \int_0^1 x_\nu^{\delta_i} dt\Big);$$

elle est donc bornée d'après (4.9). Le nombre de tels systèmes et les coefficients B de la formules (4.13) étants bornés, il en résulte que $C = o(1)$, c. à d. la formule (4.12).

Ceci établi, posons

$$\sigma_n^{(k)} = \sum_\nu \int_0^1 x_{n,\nu}^k.$$

On a donc

(4.14) $$\int_0^1 S_n^k\, dt = F_k(\sigma_n^{(1)}, \sigma_n^{(2)}, \dots, \sigma_n^{(k)}) + o(1),$$

où F_k désigne une fonction continue.

Désignons par $\xi_{n,\nu}$ la fonction égale à 1 dans un ensemble de mesure $1/n$ et à 0 dans l'ensemble complémentaire. Soient $\xi_{n,1}, \xi_{n,2}, \dots, \xi_{n,n}$ des fonctions indépendantes. La distribuante de la somme

$$U_n = \sum_\nu \xi_{n,\nu}$$

tend vers la distribuante de la loi de Poisson. En répétant l'argumentation faite pour les fonctions $x_{n,\nu}$, on conclut que

(4.15) $$\int_0^1 U_n^k\, dt = F_k(1, 1, \dots, 1) + o(1) = O(1).$$

La distribuante de la somme U_n tendant vers celle de la loi de Poisson, on en tire facilement

$$\int_0^1 U_n^k\, dt \to C_k,$$

d'où

(4.16) $$F_k(1, 1, \dots, 1) = C_k.$$

Les formules (4.14) et (4.16) donnent

$$\int_0^1 S_n^k\,dt \to C_k,$$

ce qui achève la démonstration du lemme en vertu du th. A.

On pourrait obtenir le lemme 1 par la méthode de fonctions caractéristiques, mais le raisonnement que nous venons de faire est typique, si l'on veut établir la convergence à l'aide du th. A.

Lemme 2. *Soient $x_{n,1}, x'_{n,1}, x_{n,2}, x'_{n,2}, \dots$ des fonctions indépendantes et $-x_{n,\nu}$ équimesurables avec $x'_{n,\nu}$. Posons*

$$u_{n,\nu} = x_{n,\nu} + x'_{n,\nu}.$$

Si la distribuante de la somme

$$S_n = \sum_\nu x_{n,\nu}$$

tend vers la distribuante $P(x)$ de la loi de Poisson, la distribuante de la somme

$$U_n = \sum_\nu U_{n,\nu}$$

tend vers la fonction

$$U(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x-z)\,dP(z).$$

Lemme 3. *Lorsque la distribuante de U_n tend vers U, on peut admettre que*

$$\int_0^1 U_n^k\,dt \to \int_{-\infty}^{+\infty} x^k\,dt\,U(x). \tag{4.17}$$

C'est la conséquence du th. A et du lemme 2.

Lemme 4. *Sous la condition* (4.17), *on a*

$$\max_\nu \int_0^1 |u_{n,\nu}|^k\,dt \to 0 \qquad (k=1,2,\dots).$$

Il suffit de le prouver pour k pair. La formule (4.17) donne

$$\int_0^1 u_{n,\nu}^k\,dt \leqslant M_k.$$

Or,

$$\int_0^1 |u_{n,\nu}|^2\,dt = \int_A + \int_B + \int_C,$$

où

$$A = \underset{t}{\mathrm{E}}(|U_{n,\nu}| \leqslant \Delta^{-1}), \qquad B = \underset{t}{\mathrm{E}}(\Delta^{-1} \leqslant |U_{n,\nu}| \leqslant \Delta), \qquad (\Delta \geqslant 1).$$
$$C = \underset{t}{\mathrm{E}}(|U_{n,\nu}| > \Delta),$$

Il en résulte que

$$\int_A \leqslant \Delta^{-\lambda}, \qquad \int_B \leqslant \Delta^\lambda |B|, \qquad \int_C \leqslant \frac{1}{\Delta}\int_C U^{\lambda+1} \leqslant \Delta^{-1} M_{\lambda+1}.$$

Le premier et le dernier termes sont très petits lorsque Δ est très grand, et le second terme tend d'après (4.4) vers 0 quand $n \to \infty$.

Lemme 5. *Posons*:

$$\sigma_k = \sigma_{k,n} = \sum_\nu \int_0^1 U_{n,\nu}^k\,dt, \qquad U_n = \sum_\nu U_{n,\nu}.$$

On a alors

$$\int_0^1 U_n^{2k}\,dt = \Phi_k(\sigma_2, \sigma_4, \dots, \sigma_{2(k-1)}) + o(1) + B_k\sigma_{2k}.$$

Comme dans le lemme 1, on déduit la formule

$$\int_0^1 U_n^{2k}\,dt = \Psi(\sigma_2, \sigma_4, \dots, \sigma_{2k}) + o(1).$$

L'expression $\int_0^1 U_n^{2k}\,dt$ étant uniforme par rapport à $U_{n,1}, U_{n,2}, \dots,$ il en résulte que Ψ_k doit être de la forme

$$\Phi_k(\sigma_2, \sigma_k, \dots, \sigma_{2(k-1)}) + B_k\sigma_{2k},$$

ce qui achève la démonstration.

Lemme 6. *Soient* $\xi_{n,\nu}$ *les fonctions définies dans le lemme 1 et* $\xi'_{n,\nu}$ *les fonctions équimesurables avec* $\xi_{n,\nu}$. *Supposons*

$$\xi_{n,1}, \xi'_{n,1}, \xi_{n,2}, \xi'_{n,2}, \ldots$$

indépendantes. Posons:

$$v_{n,\nu}=\xi_{n,\nu}+\xi'_{n,\nu}, \qquad V_n=\sum_\nu v_{n,\nu}.$$

Alors

$$\int_0^1 V_n^k\,dt\to C'_k, \qquad \sum_\nu\int_0^1 v_{n,\nu}^{2k}\,dt\to 2,$$

$$\int_0^1 \Big(\sum_\nu v_{n,\nu}\Big)^{2k}dt=\Phi_k(2,2,\ldots 2)+2B_k+o(1) \qquad (B_k\neq 0).$$

Lemme 7. $\sigma_{2k}\to 2$.

C'est une conséquence des lemmes 5 et 6.

Lemme 8. *On a pour tout* $\varepsilon>0$:

(i) $$\sum_\nu \big|\mathop{\mathrm{E}}_t(|U_{n,\nu}|>1+\varepsilon)\big|\to 0,$$

(ii) $$\sum_\nu \big|\mathop{\mathrm{E}}_t(1-\varepsilon\leqslant|U_{n,\nu}|\leqslant 1+\varepsilon)\big|\to 2,$$

(iii) $$\sum_\nu \big|\mathop{\mathrm{E}}_t|\varepsilon\leqslant U_{n,\nu}|\leqslant 1-\varepsilon)\big|\to 0.$$

La formule (i) résulte facilement de l'inégalité évidente

$$(1+\varepsilon)^{2k}\sum_\nu \big|\mathop{\mathrm{E}}_t(u_{n,\nu}|>1+\varepsilon)\leqslant\sigma_{2k}\to 2.$$

Posons à ce but

$$A^\varepsilon_{n,\nu}=A_{n,\nu}=\mathop{\mathrm{E}}_t(|u_{n,\nu}|>1+\varepsilon).$$

On a

$$\sigma_{2(k+s)}\geqslant\sum_\nu\int_{A_{n,\nu}} u_{n,\nu}^{2(k+s)}\,dt\geqslant(1+\varepsilon)^{2k}\sum_\nu\int_{A_{n,\nu}} u_{n,\nu}^{2s},$$

ce qui donne facilement

(4.18) $$\sum_\nu\int_{A_{n,\nu}} u_{n,\nu}^{2s}\,dt\to 0.$$

Soit

$$B_{n,\nu}=\mathop{\mathrm{E}}_t(|u_{n,\nu}|\leqslant 1-\varepsilon).$$

Nous allons prouver que

(4.19) $$\sum_\nu\int_{B_{n,\nu}} u_{n,\nu}^2\,dt\to 0.$$

En effet, dans le cas contraire, on aurait

$$\sum_\nu\int_{B_{n_i,\nu}} u_{n_i,\nu}^2\,dt\to\mu>0$$

pour une suite infinie $\{n_i\}$, d'où, en supprimant l'index n_i,

$$\sum_\nu\int_{B_\nu} u_\nu^4\,dt\leqslant(1-\varepsilon)^2\mu+o(1),$$

ou bien, pour n_i suffisament grands,

$$\sum_\nu\int_{CB_\nu} u_\nu^4\,dt\geqslant 2-(1-\varepsilon)\mu.$$

Soit η un nombre positif. On a d'après (4.18)

(4.20) $$\sum_\nu\int_{A_\nu} u_\nu^4\,dt\to 0.$$

Posons:

$$C_\nu=C_{n,\nu}=\mathop{\mathrm{E}}_t(1\leqslant|u_{n,\nu}|\leqslant 1+\eta), \qquad D_\nu=D_{n,\nu}=\mathop{\mathrm{E}}_t(1-\varepsilon\leqslant|u_{n,\nu}|\leqslant 1).$$

On a d'une façon évidente:

(4.21) $$\sum_\nu\int_{D_\nu} u_\nu^4\,dt\leqslant\sum_\nu\int_{D_\nu} u_\nu^2\,dt,$$

(4.22) $$\sum_\nu\int_{C_\nu} u_\nu^4\,dt\leqslant(1+\eta)^2\sum_\nu\int_{C_\nu} u_\nu^2\,dt.$$

Les formules (4.20), (4.21) et (4.22) donnent pour n_i très grands

$$\sum_\nu(1+\eta)^2\int_{CB_\nu} u_\nu^2\,dt\geqslant 2-(1-\varepsilon)\mu-\eta$$

ou bien:

$$\sum_\nu\int_{CB_\nu} u_\nu^2\,dt\geqslant[2-(1-\varepsilon)\mu-\eta]\,[1+\eta]^{-2},$$

$$\sum_\nu\int_0^1 u_\nu^2\,dt\geqslant[2-(1-\varepsilon)\mu-\eta]\,[1+\eta]^{-2}+\mu+o(1).$$

Pour η suffisament petit, le membre droit surpasse sûrement 2, ce qui est impossible d'après la relation $\sigma_2 \to 2$.

Les formules (ii) et (iii) sont des conséquences de la relation (4.19) ainsi établie. En effet, comme $\sigma_2 \to 2$, on obtient d'après (4.19)

$$\theta_n^2 \sum_\nu |\underset{t}{\mathrm{E}}(1-\varepsilon \leqslant |u_{n,\nu}| \leqslant 1+\varepsilon)| + o(1) \to 2,$$

où $1-\varepsilon \leqslant \theta_n \leqslant 1+\varepsilon$. La dernière inégalité donne (ii). Enfin, la formule (4.19) entraîne $\varepsilon^2 \sum_\nu |\underset{t}{\mathrm{E}}(\varepsilon \leqslant |u_{n,\nu}| \leqslant 1-\varepsilon)| \to 0$, c. à d. (iii).

Lemme 9. *Les conditions* (4.5)–(4.8) *sont nécessaires.*

Désignons par $x'_{n,\nu}$, comme toujours, les fonctions équimesurables avec $-x_{n,\nu}$ et supposons $x_{n,1}, x_{n,2}, x_{n,3}, \ldots, x'_{n,1}, x'_{n,2}, x'_{n,3}, \ldots$ indépendantes. On peut admettre que les relations (i), (ii), et (iii) du lemme 8 sont vérifiées. En appliquant l'argumentation utilisée déjà plusieurs fois, on en conclut que:

$$\sum_\nu |\underset{t}{\mathrm{E}}(|x_{n,\nu}-\lambda_{n,\nu}| > 1+\varepsilon)| \to 0; \quad |\underset{t}{\mathrm{E}}(x_{n,\nu} \geqslant \lambda_{n,\nu})| \geqslant \tfrac{1}{2}; \quad |\underset{t}{\mathrm{E}}(x_{n,\nu} \leqslant \lambda_{n,\nu})| \geqslant \tfrac{1}{2}.$$

Or, d'après (4.4), on a $\max |\lambda_{n,\nu}| \to 0$, donc aussi

$$\sum_\nu |\underset{t}{\mathrm{E}}(|x_{n,\nu}| > 1+\varepsilon)| \to 0.$$

D'autre part, l'ensemble des t où $x_{n,\nu}$ est très petit surpasse sûrement 1/2 en vertu de (4.4). Si les valeurs de la fonction $x_{n,\nu}$ sont dans l'intervalle $\langle \varepsilon, 1-\varepsilon \rangle$ et celles de $x'_{n,\nu}$ dans l'intervalle $\langle -\varepsilon/2, +\varepsilon/2 \rangle$, les valeurs de la somme $x_{n,\nu}+x'_{n,\nu}$ se trouvent dans l'intervalle $\langle \varepsilon/2, 1-\varepsilon/2 \rangle$, ce qui prouve en vertu de (iii) que

$$\sum_\nu |\underset{t}{\mathrm{E}}(\varepsilon < x_{n,\nu} < 1-\varepsilon)| \to 0.$$

D'une façon analogue,

$$\sum_\nu |\underset{t}{\mathrm{E}}(-1+\varepsilon < x_{n,\nu} < -\varepsilon)| \to 0.$$

Enfin, si $x_{n,\nu}$ et $x'_{n,\nu}$ sont très petits, la somme $x_{n,\nu}+x'_{n,\nu}$ l'est aussi; il en résulte d'après (4.19) que

$$\sum_\nu \int_0^1 (z_{n,\nu}+z'_{n,\nu})^2 \, dt \to 0,$$

où

$$z_{n,\nu} = \begin{cases} x_{n,\nu} & \text{lorsque } |x_{n,\nu}| < \varepsilon \\ 0 & \text{lorsque } |x_{n,\nu}| \geqslant \varepsilon. \end{cases}$$

La définition de $z'_{n,\nu}$ est analogue.

Il en résulte que

$$\int_0^1 \Big(\sum_\nu (z_{n,\nu}-\Delta_{n,\nu})\Big)^2 dt \to 0,$$

$$\Delta_{n,\nu} = \int_0^1 z_{n,\nu} \, dt,$$

ce qui est la condition (4.8). On voit donc que l'on peut remplacer dans le raisonnement la somme $\sum_\nu z_{n,\nu}$ par la somme $\sum_\nu \Delta_{n,\nu} = \Delta_n$, c. à d. par une constante. D'après le lemme 8, il en résulte que

$$\sum_\nu |\underset{t}{\mathrm{E}}(1-\varepsilon \leqslant |x_{n,\nu}| \leqslant 1+\varepsilon)| \to 1.$$

Nous allons prouver que

$$\sum_\nu |\underset{t}{\mathrm{E}}(-1+\varepsilon < x_{n,\nu} < -\varepsilon)| \to 0.$$

En effet, dans le cas contraire, on aurait après un changement des notations

$$\sum_\nu |\underset{t}{\mathrm{E}}(-1+\varepsilon < x_{n,\nu} < -\varepsilon)| > \mu > 0. \tag{4.23}$$

Posons

$$\bar{x}_{n,\nu} = \begin{cases} x_{n,\nu} & \text{lorsque } 1-\varepsilon < |x_{n,\nu}| < 1+\varepsilon \\ 0 & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$$

D'après ce qui précède, la distribuante de la somme $\Delta_n + \sum_\nu \bar{x}_{n,\nu}$ converge vers la loi de Poisson. On a en particulier

$$\Delta_n + \sum \int_0^1 \bar{x}_{n,\nu} \to 1,$$

d'où

$$|\Delta_n| \leqslant 1 + \Big|\sum \int_0^1 \bar{x}_{n,\nu} \, dt\Big| + o(1) \leqslant 2 + o(1).$$

D'autre part, on voit d'apès (4.23) que la probabilité pour que les valeurs de la somme $\sum_\nu \bar{x}_{n,\nu}$ se trouvent dans l'intervalle $\langle -3-\varepsilon, -3+\varepsilon \rangle$, ne tend pas vers 0. Nous sommes arrivés ainsi à une contradiction. Les conditions (4.5) et (4.6) en résultent d'une façon immédiate.

Enfin, la formule

$$\sum_{\nu}\int_{0}^{1} x_{n,\nu}\,dt \to 1$$

montre d'après ce qui précède que $\Delta_n \to 0$, ce qui est la condition (4.7).

Le th. 3 est ainsi établi.

Remarquons pour terminer qu'en rapprochant le th. 3 d'un théorème de M. Raikoff, on pourrait obtenir par un raisonnement dont se sert M. P. Lévy à l'occasion de la loi de Gauss un résultat sur la loi de Poisson sans l'hypothèse (4.4). Nous n'insisterons pas sur ce point.

Travaux cités.

[1] W. Feller, *Über das Gesetz der grossen Zahlen*, Acta Seged **8** (1936–1937), p. 191–201.

[2] W. Feller, *Über den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Math. Zeitsch. **40** (1935), p. 521–559.

[3] P. Lévy, *Propriétés asymptotiques des sommes de variables aléatoires ou enchaînées*. Journal de Math. **14** (1935), p. 347–402.

[4] P. Lévy, *Variables aléatoires*, Paris 1937.