$$L(p,q_n)+L(q_n,p')=L_n(p,p') \qquad \text{et} \qquad |L(p,q_n)|=|L(q_n,p')|=\tfrac{1}{2}|L_n(p,p')|.$$

Par suite de la compacité de $\mathcal{Y}$, on peut admettre que $\lim\limits_{k=\infty} q_{n_k}=q$. Les inégalités

$$\varrho_L(q,p)\leqslant\varrho_L(q,q_n)+\varrho_L(q_n,p)\leqslant\varrho_L(q,q_n)+\tfrac{1}{2}|L_n(p,p')|,$$
$$\varrho_L(q,p')\leqslant\varrho_L(q,q_n)+\varrho_L(q_n,p')\leqslant\varrho_L(q,q_n)+\tfrac{1}{2}|L_n(p,p')|$$

entraînent (16), d'où [8]) la convexité de $\mathcal{Y}^*$.

Lemme 3. *Si $\mathcal{Y}$ est compact et $\mathcal{X}$ est un rétracte*[4]) *de $\mathcal{Y}$, l'hyperespace $2^{\mathcal{X}}$ est un rétracte de $2^{\mathcal{Y}}$.*

Démonstration. Soit $r(x)$ une rétraction de $\mathcal{Y}$ en $\mathcal{X}$, c. à d. une fonction continue, définie pour tout $y\in\mathcal{Y}$ et telle que

$$r(\mathcal{Y})=\mathcal{X} \qquad \text{et} \qquad r(x)=x \quad \text{pour} \quad x\in\mathcal{X}.$$

En faisant correspondre à tout $B\in 2^{\mathcal{Y}}$ l'ensemble $r(B)\in 2^{\mathcal{X}}$, on transforme $2^{\mathcal{Y}}$ en $2^{\mathcal{X}}$ d'une manière continue et de façon que $r(A)=A$ pour $A\in 2^{\mathcal{X}}$. C'est donc une rétraction de $2^{\mathcal{Y}}$ en $2^{\mathcal{X}}$.

4. *Démonstration du théorème.* Soit $\mathcal{X}$ un continu localement connexe. En vertu du lemme 2, on peut admettre que $\mathcal{X}$ est situé dans un espace $\mathcal{Y}$ compact, convexe et tel que $\dim(\mathcal{Y}-\mathcal{X})\leqslant 1$. Cette inégalité, associée à la compacité et à la connexité locale de $\mathcal{X}$, entraîne que $\mathcal{X}$ est un rétracte de $\mathcal{Y}$ [9]), d'où, selon le lemme 3, $2^{\mathcal{X}}$ est un rétracte de $2^{\mathcal{Y}}$. Or, d'après le lemme 1, l'espace $2^{\mathcal{Y}}$ est localement contractile et contractile dans soi. Comme ces propriétés se transportent d'un espace à ses rétractes [1]), il en est de même de $2^{\mathcal{X}}$, c. q. f. d.

---

[8]) K. Menger, l. c., p. 89.

[9]) d'après le théorème de M. C. Kuratowski, *Sur les espaces localement connexes et péaniens en dimension n*, Fund. Math. **24** (1935), p. 276, Th. 1'.

Ein Beitrag zur Axiomatik der Abelschen Gruppen.

Von

Alfred Tarski (Warszawa).

Definition 1. Es sei G eine beliebige Menge und $a+b$ eine binäre Operation. G wird als Abelsche Gruppe mit der Grundoperation $a+b$ bezeichnet, wenn für beliebige Elemente $a, b, c\in G$ folgende Bedingungen erfüllt sind:

0.1. $a+b\in G$;

0.2. $a+b=b+a$;

0.3. $a+(b+c)=(a+b)+c$;

0.4. *es gibt genau ein Element $x\in G$, für das $a=b+x$ ist* [1]).

Definition 2. Ist G eine Abelsche Gruppe mit der Grundoperation $a+b$ und sind a und b zwei beliebige Elemente von G, so wird das einzige Element $x\in G$, für das $a=b+x$ ist, mit $a-b$ bezeichnet.

Aus diesen Definitionen ergibt sich leicht

Satz 1. Ist G eine Abelsche Gruppe mit der Grundoperation $a+b$, so sind für beliebige Elemente $a, b, c\in G$ folgende Formeln erfüllt:

1.1. $a-b\in G$,

1.2. $a-(a-b)=b$,

1.3. $a-(b-c)=c-(b-a)$,

1.4. $a-\{b-[c-(a-b)]\}=c$,

1.5. $a+b=a-[(a-a)-b]$.

---

[1]) Vgl. z. B. E. V. Huntington, Trans. Am. Math. Soc. **6** (1905), S. 192 ff. oder mein Buch: *Einführung in die mathematische Logik*, Wien 1937, S. 111 und 134. Es sei bemerkt, daß 0.1 aus 0.2–0.4 ableitbar ist; in 0.4 kann das Wort „*genau*" weggelassen werden.

Der Beweis ist entbehrlich: es handelt sich ja um Formeln, deren Gültigkeit innerhalb der Theorie der Abelschen Gruppen offenkundig ist.

Satz 1 läßt sich folgendermaßen umkehren:

Satz 2. Es sei G eine beliebige Menge und $a-b$ eine binäre Operation. Sind für beliebige Elemente $a, b, c \in G$ die Formeln 1.1, 1.2 und 1.3 oder auch 1.1 und 1.4 erfüllt und bestimmt man die binäre Operation $+$ durch die Formel 1.5, so wird G zu einer Abelschen Gruppe mit der Grundoperation $a+b$; dabei ist $a-b$ (für beliebige $a, b \in G$) mit dem einzigen Element $x \in G$ identisch, für das $a=b+x$ ist.

Beweis. Wir nehmen zunächst an, daß 1.1 und 1.4 erfüllt sind, und leiten daraus 1.2 und 1.3 ab:

(1) $a-\{b-[(c-b)-(a-b)]\}=c-b.$ [Nach 1.1, 1.4]

(2) $b-\Big\{[(c-b)-(a-b)]-\big\{a-\{b-[(c-b)-(a-b)]\}\big\}\Big\}=a.$ [Nach 1.4]

(3) $b-\{[(c-b)-(a-b)]-(c-b)\}=a.$ [Nach (2), (1)]

(4) $c-\big\{b-\{[(c-b)-(a-b)]-(c-b)\}\big\}=(c-b)-(a-b).$ [Nach 1.4]

(5) $c-a=(c-b)-(a-b).$ [Nach (4), (3)]

(6) $a-[b-(c-a)]=c-b.$ [Nach (1), (5)]

(7) $b-[c-(a-b)]=a-c.$ [Nach (6)]

(8) $a-(a-c)=c.$ [Nach 1.4, (7)]

(9) $b-\{b-[c-(a-b)]\}=c-(a-b).$ [Nach (8)]

(10) $b-(a-c)=c-(a-b).$ [Nach (9), (7)]

Aus (8) und (10) ergeben sich sofort 1.2 und 1.3.

Wir wollen jetzt aus 1.1-1.3 und 1.5 die Bedingungen 0.1-0.4 ableiten:

(11) $a+b \in G.$ [Nach 1.1, 1.5]

(12) $a-(a-b)=b-(a-a).$ [Nach 1.3]

(13) $b-(a-a)=b.$ [Nach 1.2, (12)]

(14) $b-[b-(a-a)]=a-a.$ [Nach 1.2]

(15) $b-b=a-a.$ [Nach (14), (13)]

(16) $a+b=a-[(b-b)-b].$ [Nach 1.5, (15)]

(17) $a-[(b-b)-b]=b-[(b-b)-a].$ [Nach 1.3]

(18) $b+a=b-[(b-b)-a].$ [Nach 1.5]

(19) $a+b=b+a.$ [Nach (16), (17), (18)]

(20) $a+(b-c)=a-[(a-a)-(b-c)].$ [Nach 1.5]

(21) $(a-a)-(b-c)=c-[b-(a-a)].$ [Nach 1.3]

(22) $(a-a)-(b-c)=c-b.$ [Nach (21), (13)]

(23) $a+(b-c)=a-(c-b).$ [Nach (20), (22)]

(24) $a-(c-b)=b-(c-a).$ [Nach 1.3]

(25) $b+(a-c)=b-(c-a).$ [Nach (23)]

(26) $a+(b-c)=b+(a-c).$ [Nach (23), (24), (25)]

(27) $a+\{b-[(b-b)-c]\}=b+\{a-[(b-b)-c]\}.$ [Nach (26)]

(28) $a+\{b-[(b-b)-c]\}=b+\{a-[(a-a)-c]\}.$ [Nach (27), (15)]

(29) $b+c=b-[(b-b)-c]$ und $a+c=a-[(a-a)-c].$ [Nach 1.5]

(30) $a+(b+c)=b+(a+c).$ [Nach (28), (29)]

(31) $a+c=c+a.$ [Nach (19)]

(32) $a+(b+c)=b+(c+a).$ [Nach (30), (31)]

(33) $b+(c+a)=c+(b+a).$ [Nach (30)]

(34) $b+(c+a)=c+(a+b).$ [Nach (33), (19)]

(35) $c+(a+b)=(a+b)+c.$ [Nach (19), (11)]

(36) $a+(b+c)=(a+b)+c.$ [Nach (32), (34), (35)]

(37) $b+(a-b)=b-(b-a).$ [Nach (23)]

(38) $b-(b-a)=a.$ [Nach 1.2]

(39) $b+(a-b)=a.$ [Nach (37), (38)]

(40) $b-\{b-[(b-b)-c]\}=(b-b)-c.$ [Nach 1.2]

(41) $b-(b+c)=(b-b)-c.$ [Nach (40), (29)]

(42) $(b-b)-[(b-b)-c]=c.$ [Nach 1.2]

(43) $(b-b)-[b-(b+c)]=c.$ [Nach (42), (41)]

(44) $(b-b)-[b-(b+c)]=(b+c)-b.$ [Nach (22)]

(45) $(b+c)-b=c.$ [Nach (43), (44)]

(46) Wenn $x \in G$ und $b+x=a$, so $a-b=x.$ [Nach (45)]

(47) Es gibt genau ein $x \in G$, für das $a=b+x.$ [Nach 1.1, (39), (46)].

Nach (11), (19), (36) und (47) sind die Bedingungen 0.1-0.4 erfüllt; G ist also eine Abelsche Gruppe mit der Grundoperation $a+b$. Aus (39) und (46) ersieht man dabei, daß $a-b$ mit demjenigen Element $x \in G$ identisch ist, für welches $a=b+x$. Damit ist Satz 2 bewiesen.

Man kann beim Aufbau der Theorie der Abelschen Gruppen anstatt der Operation $a+b$ die inverse Operation $a-b$ als Grundoperation betrachten [1]). Satz 2 stellt uns für diesen Fall zwei Systeme von Postulaten zur Verfügung, die zur Begründung dieser Theorie hinreichen: das eine System besteht aus 1.1, 1.2, und 1.3, das zweite aber aus 1.1 und 1.4; die Formel 1.5 kann dabei als Definition von $+$ angesehen werden.

In den metodologischen Untersuchungen über die Theorie der Abelschen Gruppen erscheint es oft als zweckmäßig, weder die Operation $a+b$ noch $a-b$ als den Grundbegriff zu betrachten, sondern einen sozusagen neutralen Begriff einzuführen, und zwar eine ternäre Relation $S(a,b,c)$, die zwischen drei Elementen a,b,c der Gruppe G dann und nur dann besteht, wenn $a=b+c$ oder (was auf dasselbe hinauskommt) $a-b=c$ ist [2]). Die beiden obigen Postulatensysteme [1,1 1.2, 1.3] und [1.1, 1.4] können dieser Fassung gemäß umgeformt werden; insbesondere nehmen dann die Postulate 1.1 und 1.4 folgende Form an:

I. *Zu zwei beliebigen Elementen* $a, b \in G$ *gibt es ein Element* $c \in G$, *für das* $S(a,b,c)$ *gilt.*

II. *Sind* a, b, c, d, e, f *und* g *Elemente von* G *und gilt* $S(a,b,d)$, $S(c,d,e)$, $S(b,e,f)$ *und* $S(a,f,g)$, *so ist* $c=g$.

Unter den Postulatensystemen, die zur Grundlegung der Theorie der Abelschen Gruppen hinreichen und S als den Grundbegriff enthalten, gibt es vermutlich kein einfacheres System als [I, II].

---

[1]) Vgl. H. Boggs and G. Y. Rainich, Bull. Am. Math. Soc. **43** (1937), S. 81 ff., wo es sich aber nicht um Abelsche, sondern um beliebige Gruppen handelt; dort ist auch weitere Litteratur angegeben.

[2]) Vgl. z.B. M. Bôcher, Bull. Am. Math. Soc. **11** (1905), S. 126 ff.; S. Leśniewski, Fund. Math. **13** (1929), S. 319 ff. und Fund. Math. **14** (1929), S. 242 ff.

Untersuchungen über das Entscheidungsproblem der mathematischen Logik.

Von

Józef Pepis (Lwów).

Einleitung. Die vorliegende Abhandlung ist der Reduktionstheorie des logischen Entscheidungsproblems [1]) gewidmet und kann als eine Fortsetzung meiner im folgenden als P_1 zitierten *) Arbeit *Beiträge zur Reduktionstheorie des logischen Entscheidungsproblems*, Acta Sc. Math. Szeged **8** (1936), Heft 1, S. 7-41, gelten.

Die nahe Beziehung des Entscheidungsproblems zu schwierigen zahlentheoretischen Problemen sowie gewisse Ergebnisse von K. Gödel [*Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*, Monatshefte für Math. und Phys., **38** (1931), S. 173-198] gaben Grund zur Vermutung, daß die vollständige Lösung dieses Problems unmöglich sei. Eine satzförmige Aussprache hat diese Vermutung erst unlängst in den Arbeiten von Alonzo Church [*An unsolvable problem of elementary number theory*, Amer. Journ. of Math., **58** (1936), S. 345-363, *A Note on the Entscheidungsproblem* and *Correction to a Note on the Entscheidungsproblem*, The Journal of Symbolic Logic, **1** (1936), S. 40-41 und S. 101-102] gefunden, der sie unter der Annahme bewiesen hat, daß

---

*) An jeder Stelle, wo ich einen Satz aus P_1 zitiere, bemerke ich es ausdrücklich durch das Stichwort „aus P_1". Wird also ein Satz ohne dieses Stichwort angeführt, so ist es ein Satz aus der vorliegenden Arbeit.

[1]) Ich meine hier unmittelbar nur das Entscheidungsproblem des engeren logischen Funktionenkalküls, wie es zuerst im Buche D. Hilbert und W. Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik*, Berlin 1928, insb. S. 72-73, formuliert worden ist. Dieses Problem wurde aber inzwischen als bereits gleichwertig mit den Entscheidungsproblemen weit umfangreicherer Systeme erkannt. Dabei ist unter dem *Entscheidungsproblem* eines formalen Systems im allgemeinen das Problem der Auffindung eines Verfahrens zu verstehen, das bei einem vorgelegten, nach den Konstruktionsregeln des Systems gebildeten Ausdruck durch endlich viele Operationen zu entscheiden erlaubt ob der Ausdruck nach den Schlußregeln des betreffenden Systems ableitbar sei.