Passons à la démonstration du th. 2. $\{G_i\}$ désignant la suite d'ensembles fermés-ouverts du lemme 1 (pour $n=0$), soit Φ_i l'ensemble des fonctions $f\in\mathcal{C}^{\mathfrak{X}}$ telles que $\overline{f(G_i)}\cdot\overline{f(\mathfrak{X}-G_i)}=0$. L'ensemble Φ_i étant ouvert [1]) et dense, le produit $\Phi=\Phi_1\cdot\Phi_2\cdot\ldots$ est un G_δ dense. Or, pour $f\in\Phi$, les ensembles $f^{-1}(y)$ sont des quasi-composantes de $\mathfrak{X}$. En effet, si $\mathfrak{X}$ n'est pas connexe entre p et q, il existe un G_i tel que $p\in G_i$ et $q\in\mathfrak{X}-G_i$, d'où $f(p)\in f(G_i)$ et $f(q)\in f(\mathfrak{X}-G_i)$, donc $f(p)\neq f(q)$, puisque $\overline{f(G_i)}\cdot\overline{f(\mathfrak{X}-G_i)}=0$.

4. *Connexité d'ordre n.* Cette notion s'impose d'une façon analogue à celle de connexité de dimension n; à savoir, la connexité entre deux points p et q est dite *d'ordre* $\geqslant n$, lorsqu'il n'existe aucun ensemble ouvert G tel que $p\in G$, $q\in\mathfrak{X}-\overline{G}$ et $Fr(G)$ se compose de $n-1$ points au plus.

Une démonstration tout-à-fait analogue à celle du th. 1 conduit au théorème suivant: *les homéomorphies* $f\in(\mathcal{J}^{\aleph_0})^{\mathfrak{X}}$ *telles que l'ordre de connexité de* $\mathfrak{X}$ *entre* p *et* q *est égal à celui de* $\overline{f(\mathfrak{X})}$ *entre* $f(p)$ *et* $f(q)$ *chaque fois que cet ordre est fini* [2]), — *constituent un ensemble résiduel dans* $(\mathcal{J}^{\aleph_0})^{\mathfrak{X}}$.

On n'aura qu'à remplacer dans le raisonnement du N°2 le théorème de plongement, cité dans le renvoi 1, par le suivant [3]): A et B étant deux ensembles fermés dont le produit est fini, les homéomorphies $f\in(\mathcal{J}^{\aleph_0})^{\mathfrak{X}}$ telles que le nombre des éléments de $\overline{f(A)}\cdot\overline{f(B)}$ est égal à celui de AB, constituent un ensemble résiduel dans l'espace $(\mathcal{J}^{\aleph_0})^{\mathfrak{X}}$.

[1]) Voir, p. ex., Fund. Math. **28**, p. 338, renvoi 1.

[2]) Cette restriction est essentielle. Ainsi, par ex., l'espace composé des segments unissant le point $(0,1)$ à tous les points rationnels de l'axe des abscisses est connexe d'ordre $\aleph_0$ entre ce point et chaque autre point. Cependant il est impossible de le compactifier sans que l'ordre de cette connexité devienne $\mathfrak{c}$.

[3]) Ce volume p. 8, th. 1.

Sur la contractilité des hyperespaces de continus localement connexes.

Par

M. Wojdysławski (Warszawa).

1. $\mathfrak{X}$ étant un espace métrique et ϱ la distance dans $\mathfrak{X}$, soit $2^{\mathfrak{X}}$ *l'hyperespace* de $\mathfrak{X}$, c. à d. l'espace dont les points sont les sous-ensembles fermés non vides de $\mathfrak{X}$, avec la distance de Hausdorff:

$$\text{dist}(X_1,X_2)=\sup\Big[\sup_{x_1\in X_1}\inf_{x_2\in X_2}\varrho(x_1,x_2),\ \sup_{x_2\in X_2}\inf_{x_1\in X_1}\varrho(x_1,x_2)\Big],\tag{1}$$

définie pour tout couple d'ensembles non vides $X_1,X_2\subset\mathfrak{X}$ (fermés ou non).

Un ensemble X_1 est dit *contractile dans un ensemble* X_2 [1]), lorsqu'il existe une fonction continue de deux variables $f(x,t)$, où $x\in X_1$ et $t\in\mathcal{J}$ ($\mathcal{J}$ désignant l'intervalle $0\leqslant t\leqslant 1$), telle que:

$$f(x,0)=x,\qquad f(x,t)\in X_2 \text{ pour chaque } t,\qquad f(x,1)=\text{const.}$$

L'espace $\mathfrak{X}$ est dit *localement contractile* lorsque, dans chaque entourage U d'un point quelconque $x\in\mathfrak{X}$, il existe un entourage V de x qui est contractile dans U.

Je me propose d'établir ici le suivant

Théorème. *Si l'espace* $\mathfrak{X}$ *est un continu localement connexe* [2]), *son hyperespace* $2^{\mathfrak{X}}$ *est localement contractile et contractile dans soi.*

La réciproque est également vraie: en effet, la contractilité locale entraîne la connexité locale; or, la compacité et la connexité locale de $2^{\mathfrak{X}}$ équivalent aux mêmes propriétés de $\mathfrak{X}$ [3]).

[1]) K. Borsuk, *Über eine Klasse von lokal zusammenhängenden Räumen*, Fund. Math. **19** (1932), § 3, p. 235–242.

[2]) c. à d. une image continue du segment rectiligne $\mathcal{J}$.

[3]) cf. T. Ważewski, *Sur un continu singulier*, Fund. Math. **4** (1923), p. 232.

Le théorème qui va être démontré est en rapport avec le problème suivant: $\mathfrak{X}$ étant un continu localement connexe (en particulier, $\mathfrak{X}=\mathcal{I}$), l'espace $2^{\mathfrak{X}}$ est-il homéomorphe au cube $\mathcal{I}^{\aleph_0}$ de l'espace de Hilbert? Ce problème étant ouvert, il était donc naturel de se demander si $2^{\mathfrak{X}}$ jouit, pour de tels $\mathfrak{X}$, des diverses propriétés de $\mathcal{I}^{\aleph_0}$ qui sont des invariants d'homéomorphie (on sait p. ex. que $\mathcal{I}^{\aleph_0}$ est un rétracte absolu [4]), qu'il est un continu homogène [5]) etc.). Ajoutons que la contractilité locale d'un espace de dimension finie, associée à sa contractilité dans soi, suffisent [1]) déjà pour que cet espace soit un rétracte absolu; mais on ne sait pas s'il en est de même, lorsque sa dimension est infinie (comme celle de l'espace $2^{\mathfrak{X}}$).

2. Désignons par $R_r(A)$, où $A\subset\mathfrak{X}$, la sphère généralisée ouverte, située dans $\mathfrak{X}$, de centre A et de rayon r, c. à d. l'ensemble des points $x\in\mathfrak{X}$ pour lesquels on a $\inf\limits_{a\in A}\varrho(a,x)<r$.

Un espace $\mathfrak{X}$ est dit *convexe* (au sens de Menger) [6]), lorsqu'il contient, pour tout couple de points $x_1,x_2\in\mathfrak{X}$, au moins un *segment rectiligne* ayant x_1 et x_2 pour extrémités (c. à d. isométrique avec le segment $\overline{0,\varrho(x_1,x_2)}$). Un tel segment sera désigné par $\overline{x_1x_2}$; il peut se réduire à un point $x_1=x_2$.

Tout ensemble de la forme $\sum\limits_{i=1}^{n-1}\overline{x_ix_{i+1}}$ où $x_1=x$ et $x_n=y$, ou bien de la forme $(x)+(y)+\sum\limits_{i=-\infty}^{+\infty}\overline{x_ix_{i+1}}$ où $x=\lim\limits_{i\to-\infty}x_i$ et $y=\lim\limits_{i\to+\infty}x_i$, sera dit respectivement *ligne brisée finie* et *ligne brisée infinie*, et désigné par $L(x,y)$. En désignant par $|L(x,y)|$ sa longueur, on a

$$|L(x,y)|=\sum_i|L(x_i,x_{i+1})|=\sum_i|\overline{x_ix_{i+1}}|=\sum_i\varrho(x_i,x_{i+1}).$$

Enfin, X étant un sous-ensemble de $\mathfrak{X}$, désignons par $T_t(P,X)$, pour $P\subset X$, l'ensemble-somme de toutes les lignes brisées finies $L(x,y)\subset X$ telles que $x\in P$ et $|L(x,y)|\leqslant t$.

On a donc:

(2) $$P\subset T_t(P,X)\subset X,$$

(3) $$T_0(P,X)=P,$$

(4) $$T_t(P,X)\subset\bar{R}_t(P)\cdot X,$$

où $\bar{R}_t(P)$ désigne la fermeture de $R_t(P)$.

[4]) K. Borsuk, *Sur les rétractes*, Fund. Math. **17** (1931), p. 159-160.

[5]) c. à d. qu'il existe pour tout couple $a,b\in\mathfrak{X}$ une homéomorphie h de $\mathfrak{X}$ en $\mathfrak{X}$, telle que $h(a)=b$. Pour la démonstration voir O. H. Keller, Math. Ann. **105** (1932), p. 757.

[6]) K. Menger, *Untersuchungen über allgemeine Metrik*, Math. Ann. **100** (1928), p. 81-82.

On constate que

(5) *les inclusions* $X_1\subset X_2\subset X_3\subset\mathfrak{X}$ et $X_4\subset\mathfrak{X}$ *entraînent l'inégalité*
$$\operatorname{dist}(X_2,X_4)\leqslant\sup[\operatorname{dist}(X_1,X_4),\operatorname{dist}(X_3,X_4)],$$

d'où l'on conclut selon (2) que, pour tout $A\subset\mathfrak{X}$ et tout $t\geqslant0$,

(6) *les inégalités* $\operatorname{dist}(A,P)\leqslant r$ *et* $\operatorname{dist}(A,X)\leqslant r$ *entraînent l'inégalité*
$$\operatorname{dist}[A,T_t(P,X)]\leqslant r.$$

De même, on conclut de (2), (4) et (5) que pour tout $t\geqslant0$

(7) $$\operatorname{dist}[P,T_t(P,X)]\leqslant t.$$

Soit $\tau>0$. Les propriétés suivantes de $T_t(P,X)$ nous seront utiles dans la suite:

(8) *Si* P *et* P' *satisfont aux conditions*

(i) $$P'\subset T_t(P,X) \quad et \quad P\subset T_{t'}(P',X),$$

l'inégalité $|t-t'|\leqslant\tau$ *entraîne l'inégalité*

(ii) $$\operatorname{dist}[T_t(P,X),T_{t'}(P',X)]\leqslant2\tau.$$

En effet, il suffit de prouver (en raison de symétrie) que l'hypothèse $x'\in T_{t'}(P',X)$ entraîne l'existence d'un $x\in T_t(P,X)$ tel que $\varrho(x',x)\leqslant2\tau$. Considérons à ce but une ligne brisée $L(x',y')\subset X$ de longueur $\leqslant t'$, où $y'\in P$. Comme $P'\subset T_t(P,X)$, il existe une ligne brisée $L(y',y)$ de longueur $\leqslant\tau$ où $y\in P'$. En tenant compte de l'inégalité $\tau+t'\leqslant2\tau+t$, on voit aisément qu'il existe un point x tel que la ligne brisée $L(x',y')+L(y',y)$ se décompose en deux parties: $L(x',x)$ et $L(x,y)$, de longueur $|L(x',x)|\leqslant2\tau$ et $|L(x,y)|\leqslant t$. Par conséquent $\varrho(x',x)\leqslant2\tau$ et $x\in T_t(P,X)$, c. q. f. d.

En outre, *si l'espace $\mathfrak{X}$ est convexe*, on a les propriétés suivantes:

(9) $$\operatorname{dist}(A,P)\leqslant r \quad entraîne \quad \bar{R}_r(A)=T_{2r}[P,\bar{R}_r(A)].$$

En effet, les conditions $x\in\bar{R}_r(A)$ et $\operatorname{dist}(A,P)\leqslant r$ entraînent alors l'existence dans $\bar{R}_r(A)$ de deux segments $\overline{xa}$ et $\overline{xp}$ de longueur $\leqslant r$, où $a\in A$ et $p\in P$. Par conséquent $|\overline{xa}+\overline{xp}|\leqslant2r$, d'où $x\in T_{2r}[P,\bar{R}_r(A)]$, ce qui entraîne $\bar{R}_r(A)\subset T_{2r}[P,\bar{R}_r(A)]$. L'inclusion inverse résulte de (2), en y substituant $2r$ à t et $\bar{R}_r(A)$ à X, puisqu'on a $P\subset\bar{R}_r(A)$ d'après l'hypothèse $\operatorname{dist}(A,P)\leqslant r$.

(10) *Si* $\operatorname{dist}(A,P')<r$ *et* $\operatorname{dist}(P',P)\leqslant\tau$, *l'inégalité*

(iii) $$|t'-t|\leqslant\tau<\tfrac12[r-\operatorname{dist}(A,P')]$$

entraîne (ii).

En effet, en vertu de (8), il suffit de montrer que (iii) entraîne (i).

Or, si $x \epsilon P$, il existe un $x' \epsilon P'$, et si $x' \epsilon P'$, il existe un $x \epsilon P$, pour lesquels on a $\varrho(x',x)<\tau$. Il en résulte (par suite de la convexité de $\mathcal{X}$) l'existence d'un segment $\overline{xx'} \subset \mathcal{X}$ de longueur $\leqslant \tau$. Comme $x' \epsilon P'$, il existe un $a \epsilon A$ tel que $\varrho(a,x') \leqslant \operatorname{dist}(A,P')$. On a donc pour tout $y \epsilon \overline{xx'}$

$$\begin{aligned}\varrho(y,a) &\leqslant \varrho(y,x')+\varrho(x',a) \leqslant \tau+\operatorname{dist}(A,P')< \\ &< \tfrac{1}{2}[r-\operatorname{dist}(A,P')]+\operatorname{dist}(A,P')<r.\end{aligned}$$

Par conséquent $\overline{xx'} \subset R_r(A)$, ce qui entraîne (i) d'après la définition de $T_t(P,X)$.

3. *Lemme 1.* *$\mathcal{Y}$ étant convexe, $2^{\mathcal{Y}}$ est localement contractile et contractile dans soi; plus précisément, quel que soit $A \epsilon 2^{\mathcal{Y}}$, la sphère ouverte $\boldsymbol{R}_r(A)$ de centre A et de rayon $r>0$ est contractile dans sa fermeture $\overline{\boldsymbol{R}}_r(A)$.*

Démonstration. Posons pour tout $P \epsilon \boldsymbol{R}_r(A)$

$$F(P,t)=T_{2rt}(P,R_r(A)). \tag{11}$$

Il vient $F(P,0)=P$ selon (3). En outre, les inégalités $\operatorname{dist}[A,\overline{R}_r(A)] \leqslant r$ et $\operatorname{dist}(A,P) \leqslant r$ entraînent $F(P,t) \epsilon \overline{\boldsymbol{R}}_r(A)$ selon (11) et (6). On a enfin $F(P,1)=\overline{R}_r(A)$ en vertu de (9).

Reste à établir la continuité de la fonction F.

Soit $P' \epsilon \boldsymbol{R}_r(A)$, $0 \leqslant t' \leqslant 1$, $\varepsilon>0$. On a donc $\operatorname{dist}(A,P')<r$. Soit $0<\tau<\inf\{\varepsilon/4r, \varepsilon/2, \frac{1}{2}[r-\operatorname{dist}(A,P')]\}$. Pour tout couple (P,t) satisfaisant aux conditions $|t'-t| \leqslant \tau$ et $\operatorname{dist}(P',P) \leqslant \tau$, on a donc d'après (10), (11) et (ii) $\operatorname{dist}[F(P,t),F(P',t')] \leqslant 2\tau \leqslant \varepsilon$, c. q. f. d.

Remarque. Dans le cas où non seulement l'espace $\mathcal{Y}$ est convexe, mais que toute composante de $\boldsymbol{R}_r(A)$, pour chaque $A \epsilon 2^{\mathcal{Y}}$, est métrisable d'une façon convexe, un raisonnement analogue permet de montrer davantage, à savoir que $\overline{\boldsymbol{R}}_r(A)$ est alors contractile dans soi.

Lemme 2 [7]. *Tout espace compact $\mathcal{X}$ est homéomorphe à un sous-ensemble X^* d'un espace $\mathcal{Y}^*$ compact, convexe et tel que*

$$\dim(\mathcal{Y}^*-X^*) \leqslant 1.$$

Démonstration. On peut admettre que $\mathcal{X}$ est situé dans le cube $\mathcal{I}^{\aleph_0}$ et que le diamètre de $\mathcal{X}$ ne surpasse pas 1. L'espace $\mathcal{X}$ étant compact, il existe pour tout n naturel un ensemble fini $F_n \subset \mathcal{X}$ tel que:

$$F_n \subset F_{n+1}, \qquad \operatorname{dist}(F_n,\mathcal{X}) \leqslant 1/2^n. \tag{12}$$

---

[7]) Je dois ce lemme à M. K. Borsuk.

En désignant par T_k la somme de tous les segments rectilignes $\overline{xy}$ tels que $x,y \epsilon F_n$ et $\varrho(x,y) \leqslant 1/2^{n-2}$, posons:

$$T=\sum_{k=1}^{\infty} T_k, \qquad \mathcal{Y}=\mathcal{X}+T. \tag{13}$$

T est donc une somme dénombrable de segments qui ont des extrémités dans $\mathcal{X}$ et dont le diamètre tend vers 0. Par conséquent $\mathcal{Y}$ est compact et $\dim(\mathcal{Y}-\mathcal{X}) \leqslant 1$.

Nous allons montrer à présent que tout couple p,p' de points de $\mathcal{Y}$ s'y laisse relier par une ligne brisée infinie $L(p,p')$ telle que

$$5\varrho(p,p') \geqslant |L(p,p')| \geqslant \varrho(p,p'). \tag{14}$$

En effet, soit k un entier tel que $1/2^{k+1} \leqslant \varrho(p,p') \leqslant 1/2^k$. Il existe d'après (12), pour chaque $l=1,2,\ldots$, un couple x_l,x_{-l} pour lequel on a $x_l,x_{-l} \epsilon F_{k+l}$, et $\varrho(p,x_l) \leqslant 1/2^{k+l}$, $\varrho(p',x_{-l}) \leqslant 1/2^{k+l}$. Il vient $\varrho(x_l,x_{l+1}) \leqslant 1/2^{k+l-1}$ et $\varrho(x_{-l},x_{-l-1}) \leqslant 1/2^{k+l-1}$. D'après la définition (13) de $\mathcal{Y}$, on a donc $\overline{x_l x_{l+1}}+\overline{x_{-l} x_{-l-1}} \subset \mathcal{Y}$. Posons

$$L(p,p')=(p)+(p')+\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \overline{x_i x_{i+1}}.$$

Alors $|L(p,p')|=\varrho(p,p')+\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \varrho(x_i,x_{i+1})$, de sorte que l'inégalité (14) est réalisée.

Ceci établi, nous allons remplacer l'espace $\mathcal{Y}$ par un espace homéomorphe $\mathcal{Y}^*$, en remplaçant la métrique ϱ par une nouvelle métrique ϱ_L, topologiquement équivalente. Posons notamment

$$\varrho_L(p,p')=\inf_{L(p,p') \subset \mathcal{Y}} |L(p,p')|.$$

On a alors, d'après (14):

$$\begin{gathered}5\varrho(p,p') \geqslant \varrho_L(p,p') \geqslant \varrho(p,p'), \\ \varrho_L(p,p')=\varrho_L(p',p), \qquad \varrho_L(p,p')+\varrho_L(p',p'') \geqslant \varrho_L(p,p'').\end{gathered} \tag{15}$$

Enfin, il existe un $q \epsilon \mathcal{Y}^*$ tel que

$$\varrho_L(p,q)=\varrho_L(p',q)=\tfrac{1}{2}\varrho_L(p,p'). \tag{16}$$

En effet, selon la définition de $\varrho_L(p,p')$, il existe une suite de lignes brisées infinies $L_1(p,p')$, $L_2(p,p')$, ... telle que

$$\lim_{n=\infty} |L_n(p,p')|=\varrho_L(p,p').$$

Soit q_n un point tel que

$$L(p,q_n)+L(q_n,p')=L_n(p,p') \qquad \text{et} \qquad |L(p,q_n)|=|L(q_n,p')|=\tfrac{1}{2}|L_n(p,p')|.$$

Par suite de la compacité de $\mathcal{Y}$, on peut admettre que $\lim\limits_{k=\infty} q_{n_k}=q$. Les inégalités

$$\varrho_L(q,p)\leqslant\varrho_L(q,q_n)+\varrho_L(q_n,p)\leqslant\varrho_L(q,q_n)+\tfrac{1}{2}|L_n(p,p')|,$$
$$\varrho_L(q,p')\leqslant\varrho_L(q,q_n)+\varrho_L(q_n,p')\leqslant\varrho_L(q,q_n)+\tfrac{1}{2}|L_n(p,p')|$$

entraînent (16), d'où [8]) la convexité de $\mathcal{Y}^*$.

Lemme 3. *Si $\mathcal{Y}$ est compact et $\mathfrak{X}$ est un rétracte*[4]) *de $\mathcal{Y}$, l'hyperespace $2^{\mathfrak{X}}$ est un rétracte de $2^{\mathcal{Y}}$.*

Démonstration. Soit $r(x)$ une rétraction de $\mathcal{Y}$ en $\mathfrak{X}$, c. à d. une fonction continue, définie pour tout $y\in\mathcal{Y}$ et telle que

$$r(\mathcal{Y})=\mathfrak{X} \qquad \textit{et} \qquad r(x)=x \quad \textit{pour} \quad x\in\mathfrak{X}.$$

En faisant correspondre à tout $B\in2^{\mathcal{Y}}$ l'ensemble $r(B)\in2^{\mathfrak{X}}$, on transforme $2^{\mathcal{Y}}$ en $2^{\mathfrak{X}}$ d'une manière continue et de façon que $r(A)=A$ pour $A\in2^{\mathfrak{X}}$. C'est donc une rétraction de $2^{\mathcal{Y}}$ en $2^{\mathfrak{X}}$.

4. *Démonstration du théorème.* Soit $\mathfrak{X}$ un continu localement connexe. En vertu du lemme 2, on peut admettre que $\mathfrak{X}$ est situé dans un espace $\mathcal{Y}$ compact, convexe et tel que $\dim(\mathcal{Y}-\mathfrak{X})\leqslant1$. Cette inégalité, associée à la compacité et à la connexité locale de $\mathfrak{X}$, entraîne que $\mathfrak{X}$ est un rétracte de $\mathcal{Y}$ [9]), d'où, selon le lemme 3, $2^{\mathfrak{X}}$ est un rétracte de $2^{\mathcal{Y}}$. Or, d'après le lemme 1, l'espace $2^{\mathcal{Y}}$ est localement contractile et contractile dans soi. Comme ces propriétés se transportent d'un espace à ses rétractes [1]), il en est de même de $2^{\mathfrak{X}}$, c. q. f. d.

[8]) K. Menger, l. c., p. 89.

[9]) d'après le théorème de M. C. Kuratowski, *Sur les espaces localement connexes et péaniens en dimension n*, Fund. Math. **24** (1935), p. 276, Th. 1'.

Ein Beitrag zur Axiomatik der Abelschen Gruppen.

Von

Alfred Tarski (Warszawa).

Definition 1. Es sei G eine beliebige Menge und $a+b$ eine binäre Operation. G wird als Abelsche Gruppe mit der Grundoperation $a+b$ bezeichnet, wenn für beliebige Elemente $a, b, c\in G$ folgende Bedingungen erfüllt sind:

0.1. $a+b\in G$;

0.2. $a+b=b+a$;

0.3. $a+(b+c)=(a+b)+c$;

0.4. *es gibt genau ein Element $x\in G$, für das $a=b+x$ ist* [1]).

Definition 2. Ist G eine Abelsche Gruppe mit der Grundoperation $a+b$ und sind a und b zwei beliebige Elemente von G, so wird das einzige Element $x\in G$, für das $a=b+x$ ist, mit $a-b$ bezeichnet.

Aus diesen Definitionen ergibt sich leicht

Satz 1. Ist G eine Abelsche Gruppe mit der Grundoperation $a+b$, so sind für beliebige Elemente $a, b, c\in G$ folgende Formeln erfüllt:

1.1. $a-b\in G$,

1.2. $a-(a-b)=b$,

1.3. $a-(b-c)=c-(b-a)$,

1.4. $a-\{b-[c-(a-b)]\}=c$,

1.5. $a+b=a-[(a-a)-b]$.

[1]) Vgl. z. B. E. V. Huntington, Trans. Am. Math. Soc. **6** (1905), S. 192 ff. oder mein Buch: *Einführung in die mathematische Logik*, Wien 1937, S. 111 und 134. Es sei bemerkt, daß 0.1 aus 0.2–0.4 ableitbar ist; in 0.4 kann das Wort „*genau*" weggelassen werden.