Sur la compactification des espaces à connexité n-dimensionnelle [1]).

Par

Casimir Kuratowski (Warszawa).

Soit $\mathcal{X}$ un espace métrique séparable. Nous dirons que $\mathcal{X}$ est à connexité $\geqslant n$-dimensionnelle entre deux points p et q lorsqu'il n'existe aucun ensemble ouvert G tel que

(1) $$p \in G, \qquad q \in \mathcal{X} - \overline{G}, \qquad \dim Fr(G) \leqslant n-1;$$

autrement dit: lorsqu'il n'existe aucune décomposition en deux ensembles fermés M et N telle que

(2) $$\mathcal{X} = M + N, \qquad p \in \mathcal{X} - N, \qquad q \in \mathcal{X} - M, \qquad \dim MN \leqslant n-1$$

(les conditions (1) et (2) sont équivalentes, car si M et N satisfont à (2), on pose $G = \mathcal{X} - N$; si G satisfait à (1), on pose $M = \overline{G}$ et $N = \mathcal{X} - G$).

Le plus grand entier n (fini ou infini) tel que la connexité de $\mathcal{X}$ entre p et q est de dimension $\geqslant n$ sera nommé *la dimension de la connexité entre p et q* [2]).

En particulier, la connexité de dimension $\geqslant 0$ coïncide avec la connexité (tout court), qui signifie qu'il n'existe aucun ensemble fermé-ouvert qui contienne p sans contenir q; ou encore: que p et q appartiennent à la même quasi-composante [3]) de $\mathcal{X}$.

---

[1]) Présenté à la Soc. Polon. Math. (section de Varsovie) le 11. II. 1938.

[2]) Cette définition se généralise aussitôt au cas où les points p et q sont remplacés par des ensembles P et Q.

[3]) Selon M. Hausdorff, la *quasi-composante* du point p est le produit de tous les ensembles fermés-ouverts contenant p.

Nous allons établir le suivant

Théorème 1. *On peut compactifier l'espace $\mathcal{X}$ sans en augmenter la dimension de la connexité entre aucun couple de points* [1]).

Plus précisément, *$\mathcal{J}^{\aleph_0}$ désignant le cube fondamental de Hilbert et $(\mathcal{J}^{\aleph_0})^{\mathcal{X}}$ l'espace fonctionnel des transformations continues de $\mathcal{X}$ en sous-ensembles du cube $\mathcal{J}^{\aleph_0}$, les homéomorphies $f \in (\mathcal{J}^{\aleph_0})^{\mathcal{X}}$ telles que, quel que soit le couple $p, q \in \mathcal{X}$, la dimension de la connexité de $\mathcal{X}$ entre p et q est égale à celle de la connexité de $\overline{f(\mathcal{X})}$ entre $f(p)$ et $f(q)$, — constituent un ensemble résiduel (dans $(\mathcal{J}^{\aleph_0})^{\mathcal{X}}$).*

Ajoutons que, si $\mathcal{X}$ est de dimension finie, le cube $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ peut être remplacé par le cube $\mathcal{J}^{2\dim\mathcal{X}+1}$, de sorte que le théorème précédent peut être combiné avec les théorèmes bien connus de compactification et de plongement, établis dans la théorie de la dimension [2]).

1. ***Lemme.*** *Il existe dans l'espace $\mathcal{X}$ une suite d'ensembles ouverts $G_1, G_2, \ldots$ tels que, si $\mathcal{X}$ est à connexité $<n$-dimensionnelle entre p et q, il existe un G_i satisfaisant aux conditions* (1).

Soit, en effet, $R_1, R_2, \ldots$ la base de l'espace $\mathcal{X}$. Soit R_k, R_l un couple d'ensembles entre lesquels la connexité de $\mathcal{X}$ est de dimension $<n$ $(n=0,1,\ldots)$. Il existe alors, par définition, un ensemble ouvert G tel que

(3) $$R_k \subset G, \qquad R_l \subset \mathcal{X} - \overline{G}, \qquad \dim Fr(G) \leqslant n-1.$$

Désignons par G_{kln} un de ces ensembles G (d'ailleurs arbitraire) [3]). En rangeant les ensembles G_{kln} en une suite simple, on parvient à la suite $\{G_i\}$ demandée.

En effet, si p, q et G réalisent les conditions (1), il existe par définition de base deux ensembles R_k et R_l vérifiant les deux inclusions (3), donc un G_i tel que

$$p \in R_k \subset G_i, \qquad q \in R_l \subset \mathcal{X} - \overline{G}_i, \qquad \dim Fr(G_i) \leqslant n-1.$$

---

[1]) Ce théorème embrasse comme cas particulier $(n=0)$ la possibilité de compactifier l'espace de façon que deux quasi-composantes différentes soient toujours situées dans deux composantes différentes (de l'espace compact).

Ce cas particulier a été proposé par M. Knaster et m'a suggéré le th. I.

[2]) Voir ma note de Fund. Math. **28** (1937), pp. 336-342.

[3]) Cf. le raisonnement de M. Sierpiński, ce volume p. 129.

2. *Démonstration du théorème 1.* Envisageons les ensembles $G_1, G_2, \dots$ du lemme précédent et posons $A_{2i}=\overline{G}_i$ et $A_{2i-1}=\mathcal{X}-G_i$. D'après un théorème de plongement[1]), les homéomorphies $f\epsilon(\mathcal{J}^{\aleph_0})^{\mathcal{X}}$ telles que $\dim \overline{f(A_i)}\cdot\overline{f(A_j)}=\dim A_i\cdot A_j$ pour $i,j=1,2,3,\dots$, constituent dans l'espace $(\mathcal{J}^{\aleph_0})^{\mathcal{X}}$ un ensemble résiduel.

Or, ces homéomorphies satisfont à la thèse du théorème. Posons, en effet, $\mathcal{Y}=\overline{f(\mathcal{X})}$ et soient p et q deux points entre lesquels la connexité de $\mathcal{X}$ est de dimension $<n$. Il s'agit de prouver que la connexité de $\mathcal{Y}$ entre $f(p)$ et $f(q)$ est de dimension $<n$. Soit G_i un ensemble satisfaisant à (1). Posons $M=\overline{f(G_i)}$ et $N=\overline{f(\mathcal{X}-\overline{G}_i)}$. Conformément à (2), il suffit de prouver que

$$\mathcal{Y}=M+N, \qquad f(p)\epsilon\mathcal{Y}-N, \qquad f(q)\epsilon\mathcal{Y}-M, \qquad \dim MN\leqslant n-1.$$

Or, f étant une homéomorphie, on a $f(\mathcal{X})\cdot\overline{f(G_i)}=f(\mathcal{X})\cdot f(\overline{G}_i)$, d'où

$$f(\mathcal{X}-\overline{G}_i)=f(\mathcal{X})-f(\overline{G}_i)=f(\mathcal{X})-\overline{f(G_i)}$$

et

$$\mathcal{Y}=\overline{f(\mathcal{X})}=\overline{f(G_i)}+\overline{f(\mathcal{X})-\overline{f(G_i)}}\subset M+\overline{f(\mathcal{X})-\overline{f(G_i)}}=M+N.$$

Puis, les ensembles G_i et $\mathcal{X}-\overline{G}_i$ étant séparés, il en est de même de $f(G_i)$ et $f(\mathcal{X}-\overline{G}_i)$, c. à d. que

$$f(G_i)\cdot\overline{f(\mathcal{X}-\overline{G}_i)}=0=\overline{f(G_i)}\cdot f(\mathcal{X}-\overline{G}_i),$$

et comme $f(p)\epsilon f(G_i)$ et $f(q)\epsilon f(\mathcal{X}-\overline{G}_i)$, il vient $f(p)\epsilon\mathcal{Y}-N$ et $f(q)\epsilon\mathcal{Y}-M$.

Enfin $MN\subset\overline{f(\overline{G}_i)}\cdot\overline{f(\mathcal{X}-G_i)}=\overline{f(A_{2i})}\cdot\overline{f(A_{2i-1})}$, d'où

$$\dim MN\leqslant\dim\overline{f(A_{2i})}\cdot\overline{f(A_{2i-1})}=\dim A_{2i}\cdot A_{2i-1}=\dim Fr(G_i)\leqslant n-1.$$

3. *Cas de $n=0$.* Le lemme du N° 1 signifie dans ce cas qu'il existe dans $\mathcal{X}$ une suite d'ensembles $\{G_i\}$ fermés-ouverts tels qu'à chaque couple de points p,q appartenant à deux quasi-composantes différentes, correspond un G_i qui contient p sans contenir q.

Soit f la fonction caractéristique de cette suite; c. à d. que $f(x)$ est le point $\frac{c_1}{3}+\frac{c_2}{9}+\dots$ de l'ensemble $\mathcal{C}$ de Cantor, où $c_i=2$ si $x\epsilon G_i$ et $c_i=0$ si $x\epsilon\mathcal{X}-G_i$. On constate aussitôt que *f est une transformation continue de $\mathcal{X}$, $f(\mathcal{X})\subset\mathcal{C}$ et la famille des ensembles $f^{-1}(y)$ où $y\epsilon f(\mathcal{X})$ coïncident avec la famille des quasi-composantes de $\mathcal{X}$* [2]).

---

[1]) Fund. Math. **28**, p. 337, th. 2.

[2]) Ce théorème a été suggéré par M. Eilenberg. Il généralise un théorème bien connu sur les espaces compacts (où les quasi-composantes coïncident avec les composantes).

Comme l'a remarqué M. Knaster, on peut déduire de là une simple démonstration de l'énoncé p. 243, renvoi 1. En effet $\mathcal{X}^*$ désignant un espace compact contenant topologiquement $\mathcal{X}$ (le cube de Hilbert, par exemple), l'ensemble $\overline{\underset{xy}{E}[y=f(x)]}$, contenu dans le produit $\mathcal{X}^*\times\mathcal{C}$, est compact, contient l'ensemble $\underset{xy}{E}[y=f(x)]$, homéomorphe à $\mathcal{X}$, et deux quasi-composantes différentes de $\underset{xy}{E}[y=f(x)]$ sont contenues toujours dans deux composantes différentes de $\overline{\underset{xy}{E}[y=f(x)]}$.

Dans le même ordre d'idées, nous allons établir le

Théorème 2. *Dans l'espace fonctionnel $\mathcal{C}^{\mathcal{X}}$, les fonctions $f\epsilon\mathcal{C}^{\mathcal{X}}$ telles que $f^{-1}(y)$ est une quasi-composante de $\mathcal{X}$ quel que soit $y\epsilon f(\mathcal{X})$, constituent un ensemble résiduel.*

Nous allons démontrer à ce but que *A étant un ensemble fermé-ouvert dans $\mathcal{X}$, les fonctions $f\epsilon\mathcal{C}^{\mathcal{X}}$ telles que $\overline{f(A)}\cdot\overline{f(\mathcal{X}-A)}=0$ constituent un ensemble dense dans l'espace $\mathcal{C}^{\mathcal{X}}$* [1]).

Remarquons d'abord que U et V étant deux sous-ensembles de $\mathcal{C}$ dont la distance au sens de Hausdorff est $<\varepsilon$, si V est un ensemble fini $=(p_1,\dots,p_m)$, il existe une transformation continue g de U en V telle que $|g(t)-t|<\varepsilon$ quel que soit $t\epsilon U$.

En effet, W_i désignant l'intervalle $p_i-\varepsilon<t<p_i+\varepsilon$, on a $U=U\cdot W_1+\dots+U\cdot W_m$. Comme $\dim U=0$, il existe un système $Z_1,\dots,Z_m$ d'ensembles fermés-ouverts dans U et tels que $U=Z_1+\dots+Z_m$, $Z_i\subset U\cdot W_i$. En posant $g(t)=p_i$ pour $t\epsilon Z_i$, on définit la fonction demandée.

Ceci établi, soit $f\epsilon\mathcal{C}^{\mathcal{X}}$ et $\varepsilon>0$. Il s'agit de définir une fonction f^* telle que $\overline{f^*(A)}\cdot\overline{f^*(\mathcal{X}-A)}=0$ et $|f^*-f|\leqslant\varepsilon$.

Soient V et V_1 deux ensembles finis disjoints et tels que la distance de V à $f(A)$ ainsi que de V_1 à $f(\mathcal{X}-A)$ est $<\varepsilon$. Soient g et g_1 deux transformations continues de $f(A)$ en V et de $f(\mathcal{X}-A)$ en V_1 respectivement et telles qu'on a toujours $|g(t)-t|<\varepsilon$ et $|g_1(t)-t|<\varepsilon$.

En posant $f^*(x)=gf(x)$ pour $x\epsilon A$ et $f^*(x)=g_1f(x)$ pour $x\epsilon\mathcal{X}-A$, on définit la fonction demandée: on a, en effet, $f^*(A)\subset V$, $f^*(\mathcal{X}-A)\subset V_1$ et $|f^*(x)-f(x)|<\varepsilon$.

---

[1]) Cet énoncé, rapproché de Fund. Math. **28**, p. 339, N° 2, implique que, *si $\dim\mathcal{X}=0$, les homéomorphies constituent un ensemble résiduel dans $\mathcal{C}^{\mathcal{X}}$.*

Passons à la démonstration du th. 2. $\{G_i\}$ désignant la suite d'ensembles fermés-ouverts du lemme 1 (pour $n=0$), soit Φ_i l'ensemble des fonctions $f\epsilon\mathcal{C}^{\mathfrak{X}}$ telles que $\overline{f(G_i)}\cdot\overline{f(\mathfrak{X}-G_i)}=0$. L'ensemble Φ_i étant ouvert [1]) et dense, le produit $\Phi=\Phi_1\cdot\Phi_2\cdot\ldots$ est un G_δ dense. Or, pour $f\epsilon\Phi$, les ensembles $f^{-1}(y)$ sont des quasi-composantes de $\mathfrak{X}$. En effet, si $\mathfrak{X}$ n'est pas connexe entre p et q, il existe un G_i tel que $p\,\epsilon\, G_i$ et $q\,\epsilon\,\mathfrak{X}-G_i$, d'où $f(p)\,\epsilon\, f(G_i)$ et $f(q)\,\epsilon\, f(\mathfrak{X}-G_i)$, donc $f(p)\neq f(q)$, puisque $f(G_i)\cdot f(\mathfrak{X}-G_i)=0$.

4. *Connexité d'ordre n.* Cette notion s'impose d'une façon analogue à celle de connexité de dimension n; à savoir, la connexité entre deux points p et q est dite *d'ordre* $\geqslant n$, lorsqu'il n'existe aucun ensemble ouvert G tel que $p\,\epsilon\, G$, $q\,\epsilon\,\mathfrak{X}-\overline{G}$ et $Fr(G)$ se compose de $n-1$ points au plus.

Une démonstration tout-à-fait analogue à celle du th. 1 conduit au théorème suivant: *les homéomorphies* $f\epsilon(\mathcal{J}^{\aleph_0})^{\mathfrak{X}}$ *telles que l'ordre de connexité de* $\mathfrak{X}$ *entre* p *et* q *est égal à celui de* $f(\mathfrak{X})$ *entre* $f(p)$ *et* $f(q)$ *chaque fois que cet ordre est fini* [2]), — *constituent un ensemble résiduel dans* $(\mathcal{J}^{\aleph_0})^{\mathfrak{X}}$.

On n'aura qu'à remplacer dans le raisonnement du N° 2 le théorème de plongement, cité dans le renvoi 1, par le suivant [3]): A et B étant deux ensembles fermés dont le produit est fini, les homéomorphies $f\epsilon(\mathcal{J}^{\aleph_0})^{\mathfrak{X}}$ telles que le nombre des éléments de $\overline{f(A)}\cdot\overline{f(B)}$ est égal à celui de AB, constituent un ensemble résiduel dans l'espace $(\mathcal{J}^{\aleph_0})^{\mathfrak{X}}$.

---

[1]) Voir, p. ex., Fund. Math. **28**, p. 338, renvoi 1.

[2]) Cette restriction est essentielle. Ainsi, par ex., l'espace composé des segments unissant le point $(0,1)$ à tous les points rationnels de l'axe des abscisses est connexe d'ordre $\aleph_0$ entre ce point et chaque autre point. Cependant il est impossible de le compactifier sans que l'ordre de cette connexité devienne $\mathfrak{c}$.

[3]) Ce volume p. 8, th. 1.

Sur la contractilité des hyperespaces de continus localement connexes.

Par

M. Wojdysławski (Warszawa).

1. $\mathfrak{X}$ étant un espace métrique et ϱ la distance dans $\mathfrak{X}$, soit $2^{\mathfrak{X}}$ *l'hyperespace* de $\mathfrak{X}$, c. à d. l'espace dont les points sont les sous-ensembles fermés non vides de $\mathfrak{X}$, avec la distance de Hausdorff:

$$\text{dist}(X_1,X_2)=\sup[\sup_{x_1\epsilon X_1}\inf_{x_2\epsilon X_2}\varrho(x_1,x_2),\ \sup_{x_2\epsilon X_2}\inf_{x_1\epsilon X_1}\varrho(x_1,x_2)], \tag{1}$$

définie pour tout couple d'ensembles non vides $X_1, X_2\subset\mathfrak{X}$ (fermés ou non).

Un ensemble X_1 est dit *contractile dans un ensemble* X_2 [1]), lorsqu'il existe une fonction continue de deux variables $f(x,t)$, où $x\,\epsilon\, X_1$ et $t\,\epsilon\,\mathcal{J}$ ($\mathcal{J}$ désignant l'intervalle $0\leqslant t\leqslant 1$), telle que:

$$f(x,0)=x,\qquad f(x,t)\,\epsilon\, X_2 \text{ pour chaque } t,\qquad f(x,1)=\text{const.}$$

L'espace $\mathfrak{X}$ est dit *localement contractile* lorsque, dans chaque entourage U d'un point quelconque $x\,\epsilon\,\mathfrak{X}$, il existe un entourage V de x qui est contractile dans U.

Je me propose d'établir ici le suivant

Théorème. *Si l'espace* $\mathfrak{X}$ *est un continu localement connexe* [2]), *son hyperespace* $2^{\mathfrak{X}}$ *est localement contractile et contractile dans soi.*

La réciproque est également vraie: en effet, la contractilité locale entraîne la connexité locale; or, la compacité et la connexité locale de $2^{\mathfrak{X}}$ équivalent aux mêmes propriétés de $\mathfrak{X}$ [3]).

---

[1]) K. Borsuk, *Über eine Klasse von lokal zusammenhängenden Räumen*, Fund. Math. **19** (1932), § 3, p. 235–242.

[2]) c. à d. une image continue du segment rectiligne $\mathcal{J}$.

[3]) cf. T. Ważewski, *Sur un continu singulier*, Fund. Math. **4** (1923), p. 232.