# Sur le plus petit corps contenant une famille donnée d'ensembles.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

$\Phi$ étant une famille donnée d'ensembles, nous désignons: par $\Phi_\varrho$ la famille formée de tous les ensembles $E$ de la famille $\Phi$ et de tous les ensembles de la forme $E_1-E_2$, où $E_1$ et $E_2$ sont des ensembles de la famille $\Phi$, et par $\Phi_s$ la famille de tous les ensembles qui sont des sommes d'un nombre fini d'ensembles de la famille $\Phi$.

Une famille d'ensembles est dite (d'après M. F. Hausdorff) un *corps d'ensembles*, si elle contient les ensembles $E_1+E_2$ et $E_1-E_2$ dès qu'elle contient les ensembles $E_1$ et $E_2$.

Le but de cette Note est de démontrer ce

***Théorème.*** *Le plus petit corps d'ensembles contenant une famille donnée $\Phi$ d'ensembles est la famille $\Phi_{\varrho s\varrho s}$.*

Ajoutons que, d'après un théorème de M-elle S. Piccard, il existe une famille *finie* $\Phi$ d'ensembles telle que

$$\Phi_{\varrho s\varrho s}\neq\Phi_{\varrho s\varrho}\ ^{1)}.$$

Démonstration. Comme on voit sans peine, il suffit, pour démontrer notre théorème, d'établir, pour toute famille $\Phi$ d'ensembles, la formule

$$\Phi_{\varrho s\varrho s\varrho}=\Phi_{\varrho s\varrho s}\ ^{2)}. \tag{1}$$

[1]) Fund. Math. **26**, p. 265. M-elle Piccard a démontré que $\Phi_{\varrho\sigma\varrho\sigma}\neq\Phi_{\varrho\sigma\varrho}$, mais, pour les familles *finies* $\Phi$, on a évidemment $\Phi_{\varrho\sigma\varrho}=\Phi_{\varrho s\varrho}$ et $\Phi_{\varrho\sigma\varrho\sigma}=\Phi_{\varrho s\varrho s}$.

[2]) Cf. S. Piccard, Fund. Math. **26**, p. 264, th. II. Or, il existe des familles $\Phi$ d'ensembles telles que toutes les familles $\Phi,\Phi_\varrho,\Phi_{\varrho\varrho},\Phi_{\varrho\varrho\varrho},\dots$ sont distinctes. Telle est p. ex. la famille $\Phi=(E_1,E_2,E_3,\dots)$, où $E_1=(1,2,3,\dots)$ et $E_n=(2n-2)$ pour $n=2,3,4,\dots$; cf. aussi Fund. Math. **14**, p. 88.



Soit donc $\Phi$ la famille donnée. Désignons par $S$ la somme de tous les ensembles de la famille $\Phi$ et, d'une façon générale, par $CH$ l'ensemble $S-H$.

Soit $E$ un ensemble de la famille $\Phi_{\varrho s\varrho}$. L'ensemble $E$ peut donc être représenté dans la forme

$$\begin{aligned}E=[(M_1-N_1)+(M_2-N_2)+\dots+(M_k-N_k)]-\\ -[(P_1-Q_1)+(P_2-Q_2)+\dots+(P_l-Q_l)],\end{aligned} \tag{2}$$

où $k$ et $l$ sont des nombres naturels, $M_i$ $(i=1,2,\dots,k)$ sont des ensembles de la famille $\Phi$ et $N_i$ $(i=1,2,\dots,k)$, $P_i$ et $Q_i$ $(i=1,2,\dots,l)$ sont des ensembles de la famille $\Phi$ ou bien des ensembles vides.

D'après les formules de De Morgan, on peut évidemment écrire en vertu de (2) [1])

$$E=(M_1CN_1+M_2CN_2+\dots+M_kCN_k)(CP_1+Q_1)(CP_2+Q_2)\dots(CP_l+Q_l).$$

En développant ce produit (fini), on conclut sans peine que l'ensemble $E$ est une somme finie d'ensembles de la forme

$$A_1A_2\dots A_p\cdot CB_1\cdot CB_2\dots CB_q, \tag{3}$$

où $A_i$ $(i=1,2,\dots,p)$ sont des ensembles de la famille $\Phi$ et $B_i$ $(i=1,2,\dots,q)$ sont des ensembles de $\Phi$ ou bien vides. Il en résulte que tout ensemble $E$ de la famille $\Phi_{\varrho s\varrho s\varrho}$ est de la forme

$$E=\sum_{i=1}^{m}M_1^iM_2^i\dots M_{p_i}^i\cdot CN_1^i\cdot CN_2^i\dots CN_{q_i}^i-\sum_{i=1}^{n}P_1^iP_2^i\dots P_{r_i}^i\cdot CQ_1^i\cdot CQ_2^i\dots CQ_{s_i}^i, \tag{4}$$

où $M_j^i$ $(i=1,2,\dots,m;\ j=1,2,\dots,p_i)$ sont des ensembles de la famille $\Phi$ et $N_j^i$ $(i=1,2,\dots,m;\ j=1,2,\dots,p_i)$, $P_j^i$ $(i=1,2,\dots,n;\ j=1,2,\dots,r_i)$ et $Q_j^i$ $(i=1,2,\dots,n;\ j=1,2,\dots,s_i)$ sont des ensembles de la famille $\Phi$ ou vides. D'après (4), nous pouvons écrire aussi

$$\begin{aligned}E=\sum_{i=1}^{m}M_1^iM_2^i\dots M_{p_i}^i\cdot CN_1^i\cdot CN_2^i\dots CN_{q_i}^i\cdot\\ \cdot\prod_{i=1}^{n}(CP_1^i+CP_2^i+\dots+CP_{r_i}^i+Q_1^i+Q_2^i+\dots+Q_{s_i}^i).\end{aligned}$$

En développant cette expression de $E$, on voit que $E$ est encore une somme finie d'ensembles de la forme (3), où

$$A_i\in\Phi \text{ pour } i=1,2,\dots p \text{ et } B_i\in\Phi \text{ ou bien } B_i=0 \text{ pour } i=1,2,\dots,q. \tag{5}$$

[1]) Cf. ma Note *Sur quelques propriétés des ensembles dénombrables* dans le Bull. Acad. Bulgare des Sciences **53**, p. 182.

Or, on a l'identité

$$(6) \qquad A_1 A_2 \ldots A_p \cdot CB_1 \cdot CB_2 \ldots CB_q =$$
$$= A_1 - [(A_1 - A_2) + (A_1 - A_3) + \ldots + (A_1 - A_p) + B_1 + B_2 + \ldots + B_q]$$

et on en conclut d'après (5) que (6) est un ensemble de la famille $\Phi_{\varrho s \varrho}$.

Ainsi, $E$ est une somme d'un nombre fini d'ensembles de la famille $\Phi_{\varrho s \varrho}$; c'est donc un ensemble de la famille $\Phi_{\varrho s \varrho s}$.

Nous avons ainsi établi que $\Phi_{\varrho s \varrho s \varrho} \subset \Phi_{\varrho s \varrho s}$.

Or, on a évidemment $\Phi_{\varrho s \varrho s} \subset \Phi_{\varrho s \varrho s \varrho}$. L'égalité (1) est ainsi établie, c. q. f. d.

On peut évidemment exprimer notre théorème de la façon suivante:

*La plus petite famille d'ensembles contenant une famille donnée $\Phi$ et close par rapport aux opérations $\varrho$ et $s$ est la famille $\Phi_{\varrho s \varrho s}$.*

Comme on sait, *on ne peut pas remplacer dans cet énoncé l'opération $s$ par l'opération $\sigma$* (la sommation finie ou dénombrable d'ensembles), puisqu'il est en défaut p. ex. pour la famille $\Phi$ de tous les intervalles rectilignes (car il existe des ensembles mesurables $B$ qui ne sont pas des $F_{\varrho \sigma \varrho \sigma}$). Or, il résulte tout de suite du théorème précité de M-elle Piccard (th. II) que l'*on peut remplacer dans notre énoncé l'opération $s$ par l'opération $\Sigma$* (la sommation finie on infinie quelconque, même indénombrable, d'ensembles).

Une construction du plus petit corps $\Psi$ d'ensembles contenant une famille donnée $\Phi$ d'ensembles a été donnée par M. F. Hausdorff dans son livre *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, p. 16. M. Hausdorff construit d'abord le plus petit anneau $\Theta$ d'ensembles contenant $\Phi$ (en appelant *anneau* toute famille d'ensembles qui contient la somme et le produit de tout couple d'ensembles qu'elle contient) et montre ensuite qu'on a $\Psi = \Theta_{\varrho s}$. Pour la famille $\Theta$, M. Hausdorff donne la formule $\Theta = \Phi_{ds} = \Phi_{sd}$, où $\Phi_d$ désigne la famille de tous les produits finis d'ensembles de la famille $\Phi$. Ainsi la formule pour $\Psi$, trouvée par M. Hausdorff, est $\Psi = \Phi_{ds\varrho s} = \Phi_{sd\varrho s}$. Quant à la relation de la famille $\Phi_d$ aux familles de la suite $\Phi_\varrho, \Phi_{\varrho s}, \Phi_{\varrho s \varrho}, \ldots$, on trouve sans peine que $\Phi_d \subset \Phi_{\varrho s \varrho}$, l'inclusion $\Phi_d \subset \Phi_{\varrho s}$ pouvant être en défaut. Or, on peut démontrer que $\Psi = \Phi_{\varrho ds}$.

# Sur les familles monotones d'ensembles fermés et leurs applications à la théorie des espaces connexes [1]).

Par

Casimir Kuratowski (Warszawa).

Dans tout ce qui suit, l'espace $\mathcal{X}$ sera supposé métrique séparable.

**1. *Familles monotones d'ensembles fermés.*** Une famille d'ensembles est dite *monotone*, lorsqu'on a pour chaque couple $A, B$ de ses éléments soit $A \subset B$, soit $B \subset A$. Une famille monotone sera considérée comme *ordonnée*: nous dirons que *$A$ précède $B$* lorsque $A \subset B$ et $A \neq B$.

D'après un théorème de M. Sierpiński [2]), *dans toute famille monotone $\boldsymbol{F}$ d'ensembles fermés, chaque élément de $\boldsymbol{F}$, sauf une infinité dénombrable, est la fermeture de la somme de tous les éléments qui le précèdent et le produit de tous les éléments qui le suivent.*

Pour s'en convaincre, désignons par $R_1, R_2, \ldots$ la base de l'espace $\mathcal{X}$ et, par $A^*$ l'ensemble formé par la réunion de tous les éléments de $\boldsymbol{F}$ qui précèdent $A$. A chaque $A$ tel que $A \neq \overline{A^*}$ faisons correspondre un indice $n(A)$ satisfaisant à la condition $A \cdot R_{n(A)} \neq 0 = A^* \cdot R_{n(A)}$. Si $A \neq B \neq \overline{B^*}$, on a $n(A) \neq n(B)$. La famille de tous les éléments $A$ tels que $A \neq \overline{A^*}$ est donc dénombrable [3]).

Le cas des éléments qui ne coïncident pas avec le produit des éléments qui le suivent est analogue.

---

[1]) Présenté au III Congrès des Mathématiciens Polonais à Varsovie, le 30. IX. 1937.

[2]) Bull. de l'Acad. Polon. des Sc. 1921, p. 62. Le théorème de M. Sierpiński contient comme des cas particuliers les théorèmes classiques de Baire sur les familles bien ordonnées d'ensembles fermés (croissants ou décroissants).

[3]) Nous entendons par *dénombrable* tout ensemble de puissance $\leqslant \aleph_0$.