En vertu du th. 3, il ne s'agit que de la suffisance de ces conditions. Or, la relation (6.2) entraîne la convergence uniforme dans tout intervalle fini de la suite des fonctions caractéristiques des fonctions $\sum x_{n,\nu}$, ce qui entraîne le résultat demandé d'après le théorème classique de M. P. Lévy [7]).

Ouvrages cités.

[1] A. Denjoy, C. R. Paris **196** (1933), p. 1713.

[2] M. Kac, *Sur les fonctions indépendantes*. Stud. Math. **6** (1936), p. 58-76.

[3] A. Kolmogoroff. Comptes Rendus de l'Académie Communiste (1929), p. 8-21.

[4] P. Lévy, *Variables aléatoires*, Paris 1937, p. XVII + 328.

[5] J. Marcinkiewicz et A. Zygmund, *Sur les fonctions indépendantes*. Fund. Math. **29** (1937), p. 60-90.

[6] J. Marcinkiewicz et A. Zygmund, *Quelques théorèmes sur les fonctions indépendantes*, Stud. Math. **7** (1937), p. 104-120.

[7]) Voir p. ex. Lévy [4], p. 37 et suivantes.

Eine Äquivalenz zwischen der Kontinuumhypothese und der Existenz der Lusinschen und Sierpińskischen Mengen.

Von

Fritz Rothberger (Wien).

Wir definieren, wie üblich [1]), eine Menge X habe die *Eigenschaft* **L** (und schreiben: $X \epsilon \mathbf{L}$), wenn jede nirgendsdichte Teilmenge von X abzählbar ist; und eine Menge Y habe die *Eigenschaft* **S** (oder: $Y \epsilon \mathbf{S}$), wenn jede Teilmenge vom Lebesgue'schen Masse Null abzählbar ist.

Aus der Kontinuumhypothese $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ folgt bekanntlich die Existenz zweier linearer Mengen X und Y von der Mächtigkeit des Kontinuums, wobei $X \epsilon \mathbf{L}$ und $Y \epsilon \mathbf{S}$ ist [2]).

In der vorliegenden Arbeit soll die Umkehrung dieses Satzes bewiesen werden (Korollar zu Satz 1).

Wir betrachten hier ausschliesslich lineare Punktmengen und bezeichnen mit $\mathfrak{R}$ die Menge der reellen Zahlen.

Lemma 1. *Wenn eine Menge von positivem äusserem Mass und von der Mächtigkeit $\aleph_1$ existiert, so lässt sich $\mathfrak{R}$ in $\aleph_1$ Teilmengen von I. Kategorie zerlegen.*

Lemma 2. *Wenn eine Menge von II. Kategorie mit der Mächtigkeit $\aleph_1$ existiert, so lässt sich $\mathfrak{R}$ in $\aleph_1$ Teilmengen vom Masse Null zerlegen.*

[1]) Vgl. etwa W. Sierpiński, *Hypothèse du continu*, Monografie Matematyczne **4**, Warszawa-Lwów 1934, p. 37 und 81.

[2]) W. Sierpiński, loc. cit., p. 29 ff., Proposition $\mathbf{P}_9$ und Proposition $\mathbf{P}_{9a}$.

Beweis von Lemma 1 [3]). Sei A eine Menge von der Mächtigkeit $\aleph_1$, deren äusseres Lebesgue'sches Mass $m_e(A)>0$ ist. Seien ferner zwei Mengen P und Q gegeben: P von I. Kategorie,

$$m(Q)=0, \qquad P+Q=\mathfrak{R}. \quad {}^{4})$$

Wir setzen nun

$$f_y(x)=x+y.$$

Dann ist $\mathfrak{R}=\sum\limits_{x\in A} f_{-x}(P)$.

Wäre nämlich $x_0 \mathop{non} \in \sum\limits_{x\in A} f_{-x}(P)$, also $x_0 \mathop{non}\in f_{-x}(P)$ für alle $x\in A$, dann wäre $f_x(x_0)=f_{x_0}(x) \mathop{non}\in P$ für alle $x\in A$, somit $f_{x_0}(x)\in Q$ (für alle $x\in A$) und $f_{x_0}(A)\subset Q$. Dies ist aber unmöglich, denn $m_e[f_{x_0}(A)]=m_e(A)>0$ und $m(Q)=0$, w. z. b. w.

Der Beweis von Lemma 2. ist dem obigen völlig analog, man hat nur überall die Ausdrücke für Mass und Kategorie zu vertauschen (d. h. Mass Null und I. Kategorie, etc.).

Bemerkung. Diese Lemmata gelten nicht nur für $\aleph_1$, sondern für jede Mächtigkeit $\mathfrak{m}\leqslant 2^{\aleph_0}$.

Satz 1. *Wenn zwei nicht-abzählbare Mengen* $X\in\mathbf{L}$ *und* $Y\in\mathbf{S}$ *existieren, so ist deren Mächtigkeit* $\overline{\overline{X}}=\overline{\overline{Y}}=\aleph_1$.

Beweis. Sei in der Tat $X\in\mathbf{L}$ und $Y\in\mathbf{S}$, X und Y nicht-abzählbar. Von diesen beiden Mengen hat offenbar jede Teilmenge von der Mächtigkeit $\aleph_1$ ebenfalls die Eigenschaft **L**, bzw. **S**, ist daher von II. Kategorie, bzw. von positivem äusserem Mass. Die Voraussetzungen der beiden Lemmata sind also erfüllt, und wir können auf die Existenz der beiden $\aleph_1$-Zerlegungen schliessen.

Aus $\mathfrak{R}=\sum\limits_{\alpha<\Omega} P_\alpha$, wobei die P_α von I. Kategorie seien, folgt $X=\sum\limits_{\alpha<\Omega} X\cdot P_\alpha$; somit $\overline{\overline{X}}=\aleph_1$, da die Summanden rechts abzählbare Mengen sind. Genau so erhält man auch: $\overline{\overline{Y}}=\aleph_1$, w. z. b. w.

[3]) Mein Beweis war ursprünglich länger und komplizierter; die vorliegende Fassung verdanke ich Frl. Braun.

[4]) Die Existenz solcher Mengen P und Q folgt bekanntlich aus der Existenz nirgendsdichter perfekter Mengen von positivem Lebesgue'schem Mass.

Korollar. *Die Kontinuumhypothese* $\aleph_1=2^{\aleph_0}$ *ist äquivalent mit der gleichzeitigen Gültigkeit folgender beider Aussagen:*

(**L**) *Es existiert eine Menge von der Mächtigkeit des Kontinuums mit der Eigenschaft* **L**.

(**S**) *Es existiert eine Menge von der Mächtigkeit des Kontinuums mit der Eigenschaft* **S**.

Bemerkung. Das Korollar bleibt offenbar richtig, wenn man in einer der beiden Aussagen (**L**) oder (**S**) die Bedingung „von der Mächtigkeit des Kontinuums" durch die schwächere Bedingung „nicht-abzählbar" ersetzt.

Warschau, im März 1938.