Sur les fonctions indépendantes I.

Par

J. Marcinkiewicz (Wilno).

1. Ce travail contient trois parties différentes.

Le théorème principal de la première partie est le th. 3. Ce théorème est la base de deux parties suivantes. Le th. 4 en est aussi une conséquence. La démonstration du th. 3 est fondée sur les résultats du th. 1.

La deuxième partie du présent travail sera consacrée aux recherches des conditions suffisantes et nécessaires pour la validité des lois: de grands nombres, de Gauss et de Poisson. Les résultats obtenus sont connus en ce qui concerne la loi de grands nombres et celle de Gauss; par contre, ceux qui concernent la loi de Poisson semblent être nouveaux. La dernière partie sera consacrée à l'étude des fonctions caractéristiques analytiques de P. Lévy.

Les résultats obtenus peuvent être traduits en langage de la théorie de probabilités, ce que nous laissons au lecteur.

2. La notion de fonctions indépendantes est due à M. M. A. Kolmogoroff [1]) et H. Steinhaus [2]). Nous allons nous appuyer souvent sur les résultats récents de M. A. Zygmund et moi-même [3]).

Nous désignons par $A, B, C, \ldots$ des constantes, qui peuvent être d'ailleurs différentes dans différents contextes. $\int$ désignera toujours l'intégrale prise dans l'intervalle $\langle 0, 1\rangle$, c. à d. l'intégrale $\int\limits_0^1$.

[1]) Kolmogoroff [3].

[2]) Kac [2].

[3]) Marcinkiewicz et Zygmund [5], [6].

3. Nous allons établir d'abord une inégalité fondamentale pour tout ce qui va suivre:

Théorème 1. *Soient $x_1, x_2, x_3, \ldots$ des fonctions indépendantes telles que*

$$\int x_\nu \, dt = 0 \qquad (3.1)$$

$$|x_\nu| \leqslant K. \qquad (3.2)$$

$$(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

Posons

$$S = \sum_\nu x_\nu.$$

Alors les inégalités

$$\int\limits_A |S|^r dt \leqslant M^r, \qquad r > 0, \qquad |CA| \leqslant \varepsilon < \varepsilon_r \qquad (3.3)$$

entraînent l'inégalité

$$\int |S|^r dt \leqslant C_r (M^r + \varepsilon K^r), \qquad (3.4)$$

où C_r et ε_r ne dépendent que de r.

La démonstration de ce théorème va être décomposée en plusieurs lemmes.

Lemme 1. *Le th. 1 est vrai pour tout $\varrho < r$, s'il est vrai pour r.*

En effet, soit $\varrho < r$ et $\varepsilon_\varrho = \varepsilon_r/2$. Il suffit de démontrer la proposition pour $K = 1$. En supposant le th. 1. faux pour ϱ, on pourrait trouver pour tout nombre n une suite de fonctions indépendantes

$$x_{1,n}, \quad x_{2,n}, \quad x_{3,n}, \quad \ldots$$

satisfaisant aux conditions (3.1) et telles que l'on ait:

$$|x_{i,n}| \leqslant 1, \qquad (3.5)$$

$$\int\limits_{A_n} |S_n|^\varrho dt = M_n^\varrho, \qquad S_n = \sum x_{i,n}, \qquad (3.6)$$

$$|CA_n| = \varepsilon_n, \qquad (3.7)$$

$$\int |S_n|^\varrho dt \geqslant n^r [M_n^\varrho + \varepsilon_n], \qquad (3.8)$$

$$\varepsilon_n \leqslant \varepsilon_r/2. \qquad (3.9)$$

Nous allons montrer que c'est impossible. On voit d'abord que $M_n \to 0$. En effet, dans le cas contraire, on pourrait supposer que $M_n = A$. Désignons par B_n l'ensemble des points contenus dans A_n et tels que $|S_n| \leqslant n$. On a $|A_n - B_n| \to 0$ d'après (3.6), de sorte que $|CB_n| \leqslant \varepsilon_r$ pour n suffisament grand. D'autre part

$$\int\limits_{B_n} |S_n|^r dt \leqslant n^{r-\varrho} \int\limits_{B_n} |S_n|^\varrho dt \leqslant n^{r-\varrho} A.$$

Le th. 1 étant supposé vrai pour r, on en tire

$$\int |S_n|^r dt \leqslant C_r[n^{r-\varrho}\Delta+\varepsilon_n],$$

ce qui donne

$$\left\{\int |S_n|^\varrho dt\right\}^{1/\varrho} \leqslant \left\{\int |S_n|^r dt\right\}^{1/r} \leqslant C_r^{1/r}[n^{r-\varrho}\Delta+\varepsilon_n]^{1/r}.$$

Or, comme $(r-\varrho)\varrho/r<r$, la dernière inégalité entraîne $\Delta=0$ d'après (3.8).

Ceci établi, nous pouvons donc supposer que $M_n^\varrho<\varepsilon_r/2$. En posant $B_n=\underset{t}{\mathrm{E}}(t\,\epsilon\,A_n, |S_n(t)|\leqslant 1)$, on a alors

$$|B_n|\geqslant 1-\varepsilon_r \qquad \text{et} \qquad \int_{B_n}|S_n|^r dt \leqslant \int_{B_n}|S_n|^\varrho dt \leqslant M_n^\varrho,$$

d'où, en appliquant notre théorème pour r,

$$\int |S_n|^r dt \leqslant C_r[M_n^\varrho+\varepsilon_n].$$

Désignons par P_n et Q_n les ensembles définis par les formules:

$$P_n=\underset{t}{\mathrm{E}}(t\,non\,\epsilon\,A_n)\,(|S_n|\leqslant 1), \qquad Q_n=\underset{t}{\mathrm{E}}(t\,non\,\epsilon\,A_n)\,(|S_n|>1).$$

On trouve facilement:

$$\int_{P_n}|S_n|^\varrho dt \leqslant |CP_n| \leqslant \varepsilon_n, \qquad \int_{Q_n}|S_n|^\varrho dt \leqslant C_r[M_n^\varrho+\varepsilon_n], \qquad \int_{A_n}|S_n|^\varrho dt \leqslant M_n^\varrho.$$

En faisant la somme de ces formules, on en tire

$$\int |S_n|^\varrho dt \leqslant C_\varrho[M_n^\varrho+\varepsilon_n],$$

ce qui est en contradiction avec (3.8).

Lemme 2. *Soient $\omega_1(\theta),\omega_2(\theta),\dots,\omega_\nu(\theta),\dots$ les fonctions de Rademacher. On a*

$$A_r\left(\sum a_\nu^2\right)^{r/2} \leqslant \int \left|\sum a_\nu\omega_\nu\right|^r d\theta \leqslant B_r\left(\sum a_\nu^2\right)^{r/2} \qquad (r>0).$$

Ce lemme est connu; il est dû à M. A. Kintchine.

Lemme 3. *Pour tout $r>0$, il existe un $\varepsilon_r>0$ tel que l'on a*

$$\int_A \left|\sum a_\nu\omega_\nu\right|^r d\theta \geqslant C_r\left(\sum a_\nu^2\right)^{r/2} \quad \textit{dès que} \quad |CA|\leqslant\varepsilon_r.$$

Nous ignorons si ce lemme a été explicitement formulé dans la littérature; en tout cas, sa démonstration est immédiate. On a en effet,

$$\int \left|\sum a_\nu\omega_\nu\right|^r d\theta = \int_A + \int_{CA} = \int_A + O\sqrt{\varepsilon_r}\left\{\int \left|\sum a_\nu\omega_\nu\right|^{2r} d\theta\right\}^{1/2} = \int_A + O\sqrt{\varepsilon_r}\left(\sum a_\nu^2\right)^{r/2}$$

ou bien

$$\int_A \left|\sum a_\nu\omega_\nu\right|^r d\theta \geqslant C_r\left(\sum a_r^2\right)^{r/2} - O\left(\sqrt{\varepsilon_r}\sum a_\nu^2\right)^{r/2},$$

d'où le résultat demandé pour ε_r suffisament petit.

Lemme 4. *Si les fonctions indépendantes $x_1,x_2,\dots,x_n,\dots$ admettent des distribuantes symétriques et vérifient les relations* (3.1) *et* (3.3), *il existe un ensemble B tel que $|CB|<\alpha_r\varepsilon$ et*

$$\int_B \left(\sum x_\nu^2\right)^{r/2} dt \leqslant C_r M^r, \tag{3.10}$$

où α_r et C_r ne dépendent que de r.

Soit

$$S(\theta,t)=\sum x_\nu(t)\,\omega_\nu(\theta).$$

Les fonctions $S(\theta,t)$, considérées comme des fonctions de t, sont équimesurables. Il existe donc pour tout θ un ensemble A_θ, $|A_\theta|=|A|$, tel que

$$\int_{A_\theta} |S(\theta,t)|^r dt \leqslant M^r. \tag{3.11}$$

Désignons par Q l'ensemble plan des points (θ,t) tels que $t\,\epsilon\,A_\theta$, et par $\varphi(\theta,t)$ sa fonction caractéristique. On a d'après (3.11)

$$\int\int \varphi(\theta,t)\,|S(\theta,t)|^r dt\,d\theta \leqslant M^r.$$

Désignons par B l'ensemble des points t tels que la droite $t=$const. contient un ensemble de mesure $\geqslant 1-\varepsilon_r$ (ε_r fixé) de points θ pour lesquels $(\theta,t)\,\epsilon\,Q$. On a

$$|CB|(1-\varepsilon_r)+|B|\geqslant 1-\varepsilon, \qquad |B|>1-\varepsilon/\varepsilon_r.$$

Soient Q^* l'ensemble des points $(\theta,t)\,\epsilon\,Q$ tels que $t\,\epsilon\,B$, et $\varphi^*(\theta,t)$ sa fonction caractéristique. On a alors $\int\int \varphi^*(\theta,t)\,|S(\theta,t)|^r dt\,d\theta \leqslant M^r$, ce qui entraîne (3.10) en vertu du lemme 3.

Lemme 5. *Le th. 1 est vrai pour les fonctions x_ν symétriques (c. à d. à distribuantes symétriques), lorsque $r=2k$ où k est un entier positif.*

Nous allons démontrer ce lemme pour le cas de $k=3$, qui est tout à fait typique. D'après le lemme 4, nous pouvons supposer que

$$\int_A (\sum x_\nu^2)^3 dt \leqslant M^6, \qquad |CA| \leqslant \varepsilon < \varepsilon_r.$$

On a

$$\int (\sum x_\nu^2)^3 dt = \sum \int x_\lambda^2 x_\mu^2 x_\nu^2 \, dt =$$

$$= \sum_{\nu\neq\mu\neq\nu} \int x_\lambda^2 \, dt \int x_\mu^2 \, dt \int x_\nu^2 \, dt + \sum_{\nu\neq\mu} \int x_\nu^4 \, dt \int x_\mu^2 \, dt + \sum_\nu \int x_\nu^6 = A+B+C.$$

Supposons que A est le plus grand des nombres A, B, C. On a alors, en posant $\sigma = \sum x_\nu^2$,

$$\int \sigma^3 dt \leqslant R\Big(\int \sigma\Big)^3 = K\Big(\int_A \sigma \, dt + \int_{CA} \sigma \, dt\Big)^3 \leqslant$$

$$\leqslant D\Big[M^2 + \varepsilon^{2/3}\Big(\int \sigma^3 dt\Big)^{1/3}\Big]^3 \leqslant D\Big[M^6 + \varepsilon^2 \int \sigma^3 dt\Big].$$

En admettant $D\varepsilon^2 < \frac{1}{2}$, on en tire

$$\int \sigma^3 dt \leqslant 2DM^6. \tag{3.12}$$

D'une façon analogue, si B est le plus grand des nombres A, B, C, on a

$$\int \sigma^3 dt \leqslant D \int \sigma \, dt \int \sigma^2 dt \leqslant D \Big\{\int \sigma^2 dt\Big\}^{3/2}$$

et on en conclut comme auparavant que l'on a (3.12) dès que ε est suffisamment petit.

Dans le cas où C est le maximum de A, B, C, on peut suivre une autre voie. On a dans ce cas

$$\int \sigma^3 dt \leqslant 3 \sum \int x_\nu^6 \, dt = 3 \sum \int_A x_\nu^6 \, dt + 3K^4 \sum \int_{CA} x_\nu^2 \, dt \leqslant 3M^6 + 3K^4 \varepsilon^{2/3} \Big(\int \sigma^3 dt\Big)^{1/3},$$

ce qui donne ou bien (3.12) ou bien $\int \sigma^3 dt \leqslant DK^4 \varepsilon^{2/3} \Big(\int \sigma^3 dt\Big)^{1/3}$.

Le premier cas est banal et dans le second on obtient $\int_{CA} \sigma^3 dt \leqslant DK^6 \varepsilon$. On a donc toujours

$$\int \sigma^3 dt \leqslant C_6 [M^6 + K^6 \varepsilon].$$

Pour en tirer l'inégalité (3.10), il suffit de s'appuyer sur le lemme connu suivant [4]):

Lemme 6. *Soient $x_1, x_2, \ldots$ des fonctions indépendantes à valeurs moyennes nulles. On a*

$$A_r \int \sigma^{r/2} dt \leqslant \int |S|^r dt \leqslant B_r \int \sigma^{r/2} dt \qquad (r \geqslant 1).$$

[4]) Marcinkiewicz et Zygmund [6].

Pour se débarrasser de la restriction que les fonctions $x_1, x_2, \ldots$ soient symétriques, on utilisera le

Lemme 7. *Soient x et $\bar{x}$ deux fonctions indépendantes à valeurs moyennes nulles et telles que x est équimesurable avec $-\bar{x}$. On a*

$$A_r \int |x|^r dt \leqslant \int |x + \bar{x}|^r dt \leqslant B_r \int |x|^r \qquad (r \geqslant 1).$$

Ce lemme est aussi connu [5]).

Lemme 8. *Le th. 1 est vrai pour les r pairs.*

Soit, en effet, $\bar{x}_\nu$ équimesurable avec $-x_\nu$. Supposons que les fonctions $x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2, \ldots$ sont indépendantes [5*]).

Les fonctions $x_\nu + \bar{x}_\nu$ sont symétriques et vérifient les conditions:

$$|x_\nu + \bar{x}_\nu| \leqslant 2K, \qquad \int_A |\sum (x_\nu + \bar{x}_\nu)|^r dt \leqslant C \int_A |\sum x_\nu|^r dt.$$

Il vient de là, en supposant r entier pair et en tenant compte du lemme 5,

$$\int |\sum (x_\nu + \bar{x}_\nu)|^r dt \leqslant C_r [M^r + K^r \varepsilon],$$

ce qui donne en vertu du lemme 7 l'inégalité (3.4) pour les r pairs.

Le théorème résulte directement des lemmes 1 et 8.

4. Soit V_n une suite de fonctions de distribution. Posons

$$F_n(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^\lambda dV_n(x). \tag{4.1}$$

Nous appellerons ces fonctions les *fonctions des moments*.

Théorème 2. *Si la suite des fonctions des moments $F_n(\lambda)$ converge dans un intervalle $\langle \alpha, \beta \rangle$, où $\alpha \geqslant 0$, vers une fonction $F(\lambda)$, la suite V_n tend vers une fonction de distribution V satisfaisant à la condition*

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^\lambda dV(x). \tag{4.2}$$

Il est très probable que ce théorème soit connu, quoiqu'il soit difficile de dire s'il a été formulé explicitement dans la littérature mathématique. Nous allons déduire le th. 2 de trois lemmes suivants:

[5]) ibid.

[5*]) en appliquant le th. suivant de M. A. Denjoy [1]: *pour toute suite $\{f_n\}$ de fonctions définies dans l'intervalle $\langle 0, 1 \rangle$, il existe une suite équimesurable de fonctions indépendantes.*

Lemme 1. *Soit* $\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^r dV(x)<\infty$. *La fonction* $F(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^z\,dV(x)$ *est analytique pour* $0<R(z)<r$.

La démonstration est immédiate.

Lemme 2. *Si la suite* $F_n(z)$ *converge pour* $a<z<\beta$, *elle converge uniformément dans tout rectangle défini par les inégalités:*

$$|z|\leqslant M;\qquad \varepsilon<R(z)<\beta-\varepsilon;\qquad 2\varepsilon<\beta.$$

C'est une conséquence immédiate du lemme 1 et du fait que les fonctions $F_n(z)$ sont uniformément bornées dans le domaine considéré.

Lemme 3. *Sous les conditions du lemme 2 la suite* $F_n(i\theta)$ *converge uniformément dans tout intervalle* $-M\leqslant\theta\leqslant M$.

Comme l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^r dV_n(x)\leqslant M_r \qquad (0<r<\beta)$$

existe, il est évident qu'il est possible de choisir un nombre $\Delta<1$ suffisamment grand pour que l'on ait:

$$\int_{\Delta}^{\infty}|x|^r dV_n(x)\leqslant\varepsilon,\qquad \int_{-\infty}^{-\Delta}|x|^r dV_n(x)\leqslant\varepsilon e^{-\pi M}.$$

On a alors aussi:

$$\int_{\Delta}^{\infty}|x|^\lambda dV_n(x)\leqslant\varepsilon,\qquad \int_{-\infty}^{-\Delta}|x|^\lambda dV_n(x)\leqslant\varepsilon e^{-\pi M}\qquad (0<\lambda\leqslant r).$$

Supposons que $0<R(z)<r$, $|I(z)|\leqslant M$ et considérons l'intégrale

$$(4.3)\quad \left|\int_{\Delta}^{\infty}x^z dV_n(x)\right|\leqslant\left|\int_{\Delta}^{\infty}e^{z\lg x}dV_n(x)\right|\leqslant\int_{\Delta}^{\infty}e^{R(z)\lg x}dV_n(x)\leqslant\int_{\Delta}^{\infty}x^r dV\leqslant\varepsilon.$$

D'autre part

$$(4.4)\quad \left|\int_{-\infty}^{-\Delta}x^z dV(x)\right|=\left|\int_{-\infty}^{-\Delta}e^{(\lg|x|+i\pi)z}dV_n(x)\right|\leqslant e^{-\pi I(z)}\int_{-\infty}^{-\Delta}e^{\lg|x|R(z)}dV_n(x)\leqslant\varepsilon.$$

Désignons par F_0 la limite de la suite F_n. D'après ce qui précede, elle est sûrement définie pour $0<R(z)<r$ et tend vers une limite bien déterminée quand $z\to i\theta$. Nous pouvons donc admettre qu'elle est définie aussi pour $z=i\theta$. Les inégalités (4.3) et (4.4) montrent que la fonction $F_n(z)$ peut être représentée dans le domaine $0\leqslant R(z)\leqslant r$, $|I(z)|\leqslant M$ par l'intégrale

$$\Phi_\nu(z)=\int_{-\Delta}^{\Delta}x^z dV_\nu(x)\qquad (\nu=0,1,2,\ldots)$$

avec une erreur $\leqslant 2\varepsilon$. La fonction $\Phi(z)$ étant continue, on a pour x suffisamment petits

$$(4.5)\qquad |\Phi_\nu(x+iy)-\Phi_\nu(iy)|\leqslant\varepsilon,\qquad -M\leqslant y\leqslant M.$$

Or, pour n très grands, la différence $F_n(x+iy)-F_0(x+iy)$ (où x est fixé) est très petite, ce qui montre en vertu des inégalités (4.3), (4.4) et (4.5) que $F_n(i\theta)$ diffèrent très peu de $F_0(i\theta)$ dès que $-M\leqslant\theta\leqslant M$ et n est très grand. Le lemme 3 est ainsi établi.

Nous pouvons maintenant démontrer le th. 2. D'abord, on voit facilement que les suites $\{F_n^{(1)}(z)\}$ et $\{F_n^{(2)}(z)\}$, où

$$F_n^{(1)}(z)=\int_0^\infty x^z dV_n(x),\qquad F_n^{(2)}(z)=\int_{-\infty}^0 x^z dV_n(x),$$

convergent aussi pour $a<z<\beta$. En répétant donc l'argumentation du lemme 3, nous pouvons admettre que les suites $\{F_n^{(1)}(i\theta)\}$ et $\{F_n^{(2)}(i\theta)\}$ convergent uniformément dans tout intervalle fini. On a

$$F_n^{(1)}(i\theta)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\theta u}dV_n^*(u)\qquad\text{où}\qquad V_n^*(u)=V_n(e^u).$$

La suite $F_n^{(1)}(i\theta)$ étant uniformément convergente, on conclut d'un théorème connu [6]) que la suite $V_n^*(u)$ converge vers une fonction V non décroissante assujettie à la condition $V(\infty)=1$. La même conclusion est donc justifiée aussi pour la suite $V_n(x)$ dès que $0\leqslant x\leqslant\infty$. En opérant de la même façon sur la suite $F_n^{(2)}(z)$, on établit facilement la convergence de la suite $V_n(x)$ pour $-\infty\leqslant x\leqslant 0$, ce qui achève la démonstration du th. 2.

5. Nous allons démontrer à présent le théorème principal de ce travail.

Théorème 3. *Soit donné pour chaque* n *un système de fonctions indépendantes* $x_{n,1},x_{n,2},x_{n,3},\ldots$ *Soit* $S_n=\sum_\nu x_{n,\nu}$, *et* V_n *la distribuante de la fonction* S_n.

Pour que la suite V_n *converge vers une fonction* V *admettant une fonction de moments* $F(z)$, *il faut et il suffit qu'ils existe des constantes* $K_1,K_2,\ldots$ *telles que:*

$$(5.1)\qquad \sum_\nu\left|\underset{t}{\mathrm{E}}(|x_{n,\nu}-\lambda_{n,\nu}|\geqslant K_n)\right|\to 0,$$

$$(5.2)\qquad F_n^*(z)\to F(z),$$

où $\lambda_{n,\nu}$ *est défini par les relations:* $|\underset{t}{\mathrm{E}}(x_{n,\nu}\geqslant\lambda_{n,\nu})|\geqslant\frac{1}{2}$, $|\underset{t}{\mathrm{E}}(x_{n,\nu}\leqslant\lambda_{n,\nu})|\geqslant\frac{1}{2}$, F_n^* *désigne la fonction de moments de la somme* $\sum_\nu x_{n,\nu}^*$ *et*

$$(5.3)\qquad x_{n,\nu}^*=\begin{cases}x_{n,\nu} & si\quad |x_{n,\nu}|\leqslant K_n,\\ 0 & si\quad |x_{n,\nu}|>K_n.\end{cases}$$

[6]) Voir p. ex. Lévy [4], p. 37 et suivantes.

En tenant compte du th. 2, il suffit de montrer que les conditions (5.1) et (5.2) sont nécessaires. Cette démonstration sera composée de six lemmes.

Lemme 1. *Soit V symétrique et telle que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^r dV(x) < \infty.$$

Posons:

$$\sigma_n = \sum_\nu x_{n,\nu}^2, \qquad E_n = E_n(K) = \underset{t}{\mathrm{E}}(\sigma_n \geqslant K^2).$$

Les fonctions $x_{n,\nu}$ étant symétriques, si la suite des distribuantes des fonctions S_n converge vers V, on a pour K très grands

$$\lim_n |E_n| \cdot K^r \leqslant C_r. \tag{5.4}$$

Soit

$$S_n(\theta, t) = \sum_\nu \omega_\nu(\theta)\, x_{n,\nu}.$$

Pour chaque θ, la mesure de l'ensemble des t où $|S_n(\theta,t)| \leqslant K$ est, pour n très grands, sensiblement proche de $V(K) - V(-K)$, au moins quand $-K$ et K sont des points de continuité de la fonction V. Il en résulte que l'ensemble des t pour lesquels il existe un ensemble de θ surpassant en mesure $1-\varepsilon_r$ (ε_r fixé) et satisfaisant à la condition $|S_n(\theta,t)| \leqslant K$ est d'un même ordre de grandeur. D'après le lemme 3 de **3**, on conclut que, en un tel point, on a $\sigma_n \leqslant C_r M$. Or, $1 - V(K) + V(-K) \leqslant M_r K^{-r}$, ce qui achève la démonstration du lemme.

Lemme 2. *Supposons $x_{n,\nu}$ et V symétriques et soit*

$$x^*_{n,\nu} = \begin{cases} x_{n,\nu} & \text{lorsque} \quad |x_{n,\nu}| < K \\ 0 & \text{lorsque} \quad |x_{n,\nu}| \geqslant K. \end{cases} \tag{5.5}$$

On a alors

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, K^r \sum_\nu |\underset{t}{\mathrm{E}}(x^*_{n,\nu} \neq x_{n,\nu})| \leqslant C_r. \tag{5.6}$$

Posons

$$E_{n,\nu} = \underset{t}{\mathrm{E}}(x^*_{n,\nu} \neq x_{n,\nu}), \qquad E_n = \underset{t}{\mathrm{E}}(\sigma_n \leqslant K^2).$$

On a évidemment:

$$\prod C E_{n,\nu} \supset E_n, \qquad \prod (1 - |E_{n,\nu}|) \geqslant |E_n|.$$

D'après le lemme 1, on en conclut que $|CE_n| \leqslant AK^{-r}$, d'où l'inégalité (5.6).

Lemme 3. *On a pour tout $K > 0$*

$$\limsup_{n\to\infty} \int |S^*_n|^r dt \leqslant C_r M_r \tag{5.7}$$

où $M_r = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^r dV(x)$, $S^*_n = \sum_\nu x^*_{n,\nu}$ *et les* $x^*_{n,\nu}$ *sont définis par* (5.5).

En tenant compte du lemme 2, on voit que S^*_n et S_n ne diffèrent, pour n très grand, que dans un ensemble de mesure d'ordre K^{-r} et, d'autre part, que l'ensemble des points où S_n surpasse K est aussi d'ordre K^{-r}. Il existe donc un ensemble A_n tel que $|CA_n|$ est d'ordre K^{-r} et que l'on a $S^*_n = S_n$, $|S^*_n| \leqslant K$ partout dans cet ensemble. Par conséquent

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{A_n} |S^*_n| dt \leqslant \int_{-K}^{K} |x|^r dV(x),$$

au moins quand K et $-K$ sont des points de continuité de la fonction V. Pour K suffisament grand, nous pouvons appliquer le th. 1, ce qui nous donne l'inégalité (5.7).

Lemme 4. *Il existe une suite $K_n \to \infty$ telle qu'en posant:*

$$x^*_{n,\nu} = x_{n,\nu} \quad si \quad |x_{n,\nu}| \leqslant K_n, \qquad x^*_{n,\nu} = 0 \quad si \quad |x_{n,\nu}| > K_n,$$

$$S^*_n = \sum_\nu x^*_{n,\nu}, \qquad M_r = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^r dV(x),$$

on a:

$$\sum_\nu |\underset{t}{\mathrm{E}}(|x_{n,\nu}| > K_n)| \to 0, \tag{5.8}$$

$$\int |S^*_n|^r dt \leqslant C_r M_r. \tag{5.9}$$

La possibilité du choix d'une suite $K_n \to \infty$ satisfaisant à l'inégalité (5.9) résulte du lemme 3; l'inégalité (5.8) est alors une conséquence immédiate de la relation $K_n \to \infty$ et du lemme 2.

Lemme 5. *Les conditions du th. 3 sont nécessaires si $x_{n,\nu}$ et V sont symétriques.*

On conclut du lemme 4 que les fonctions $F^*_n(z)$ sont bornées pour $\Delta < R(z) < r - \Delta$, $|I(z)| \leqslant M$. Comme $V^*_n \to V$, il en résulte que $F^*_n(z) \to F(z)$, au moins pour z réels et tels que $\Delta < z < r - \Delta$, ce qui entraîne la convergence de la suite $\{F^*_n(z)\}$ dans la bande $\Delta < R(z) < r - \Delta$. Une simple modification de l'argumentation permet d'établir la convergence pour $0 < R(z) < r$.

Lemme 6. *La condition du th. 3 est nécessaire dans le cas général.*

Posons $x_{n,\nu}+\bar{x}_{n,\nu}=y_{n,\nu}$, où $\bar{x}_{n,\nu}$ est équimesurable avec $-x_{n,\nu}$, et $Y_n=\sum_\nu y_{n,\nu}$. Définissons maintenant $y^*_{n,\nu}$ de manière que les conclusions du lemme 5 soient satisfaites. On a:

$$\sum_\nu |\underset{t}{\mathrm{E}}(|y_{n,\nu}|>K_n)|\to 0, \tag{5.10}$$

$$\int |Y^*_n|^r dt \leqslant M_r. \tag{5.11}$$

Soient $\lambda_{n,\nu}$ définis de façon que l'on ait $|\underset{t}{\mathrm{E}}(x_{n,\nu}\geqslant\lambda_{n,\nu})|\geqslant\frac{1}{2}$ et $\underset{t}{\mathrm{E}}|(x_{n,\nu}\leqslant\lambda_{n,\nu}|\geqslant\frac{1}{2}$. La formule (5.10) entraîne facilement

$$\sum_\nu |\underset{t}{\mathrm{E}}(|x_{n,\nu}-\lambda_{n,\nu}|\geqslant K_n|)\to 0,$$

ce qui se déduit facilement des relations:

$$\underset{t}{\mathrm{E}}(x_{n,\nu}-\lambda_{n,\nu}\geqslant K_n)\,\underset{t}{\mathrm{E}}(\bar{x}_{n,\nu}+\lambda_{n,\nu}\geqslant 0)\subset\underset{t}{\mathrm{E}}(y_{n,\nu}\geqslant K_n),$$

$$\underset{t}{\mathrm{E}}(x_{n,\nu}-\lambda_{n,\nu}\leqslant -K_n)\,\underset{t}{\mathrm{E}}(\bar{x}_{n,\nu}+\lambda_{n,\nu}<0)\subset\underset{t}{\mathrm{E}}(y_{n,\nu}\leqslant -K_n).$$

Posons

$$x'_{n,\nu}=\begin{cases} x_{n,\nu} & si \quad |x_{n,\nu}-\lambda_{n,\nu}|>K_n \\ 0 & si \quad |x_{n,\nu}-\lambda_{n,\nu}|\leqslant K_n, \end{cases}$$

et désignons par $x''_{n,\nu}$ la fonction équimesurable avec $-x'_{n,\nu}$. Supposons enfin les fonctions $x'_{n,1}, x''_{n,1}, x'_{n,2}, x''_{n,2},\ldots$ indépendantes. La distribuante de la somme $\sum(x'_{n,\nu}+x''_{n,\nu})$ tend alors vers $\int_{-\infty}^{+\infty} V(x-y)\,dV(x)$ pour $n\to\infty$.

Il est évident que la mesure de l'ensemble où la somme considérée diffère de Y_n ne surpasse pas la somme suivante

$$S=\sum_\nu |\underset{t}{\mathrm{E}}\{(x'_{n,\nu}+x''_{n,\nu})\neq y_{n,\nu}\}|.$$

D'autre part, il est facile de voir que $S\leqslant C\sum_\nu |\underset{t}{\mathrm{E}}\{|y_{n,\nu}|\geqslant K_n\}|$.

D'après (5.6), la dernière somme peut être supposée d'ordre K^{-r}. Nous pouvons donc appliquer le th. 1, ce qui donne

$$\int |\sum x'_{n,\nu}+x''_{n,\nu}|^r dt=O(1).$$

Or, comme la distribuante de $\sum x'_{n,\nu}$ converge vers V, il en résulte facilement que $\int |\sum x'_{n,\nu}|^r dt=O(1)$ dès que la fonction V admet au moins deux points différents de croissance. La dernière inégalité donne facilement le résultat demandé.

Il nous reste le cas où la fonction V n'admet qu'un seul point de croissance. Sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer que c'est le point 0.

Soient $x_{\nu,0}$ des fonctions équimesurables à une fonction x_0 bornée et à distribuante continue. La loi de la somme $x_{n,0}+\sum x_{n,\nu}$ tend alors vers celle définissant x_0. Nous pouvons donc appliquer notre théorème, démontré déjà pour les distribuantes continues, ce qui donne

$$\int |x'_{n,0}+\sum x'_{n,\nu}|^k dt=O(1) \qquad (k>0),$$

la définition de $x'_{n,\nu}$ étant la même qu'auparavant. En tenant compte de l'hypothèse que $x'_{n,0}$ sont uniformément bornées, on en conclut que $\int |\sum x'_{n,\nu}|^k dt=O(1)$. La distribuante de la somme $\sum x'_{n,\nu}$ convergeant vers celle de la fonction identiquement égale à 0, il vient

$$\int |\sum x_{n,\nu}|^k dt\to 0 \qquad (k>0),$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

6. Le th. 3, qui vient d'être établi, se simplifie dans le cas où la fonction caractéristique de la distribuante limite est une fonction entière. Nous avons dans ce cas le

Théorème 4. *Soient $V_n(x)$ la distribuante de la somme $\sum x_{n,\nu}$ les fonctions $x_{n,\nu}$ étant indépendantes.*

Pour que la suite $V_n(x)$ converge vers une distribuante $V(x)$ dont la fonction caractéristique est entière, il faut et il suffit qu'il existe une suite de constantes $K_1, K_2, K_3,\ldots$ satisfaisant aux conditions:

$$\sum_\nu |\underset{t}{\mathrm{E}}(|x_{n,\nu}-\lambda_{n,\nu}|>K_n)|\to 0, \tag{6.1}$$

$$\int_0^1 [\sum x'_{n,\nu}]^k dt\to\int_{-\infty}^{+\infty} x^k dV(x) \qquad (k=1,2,\ldots), \tag{6.2}$$

où $\lambda_{n,\nu}$ sont définis par les relations:

$$|\underset{t}{\mathrm{E}}(x_{n,\nu}\geqslant\lambda_{n,\nu})|\geqslant\tfrac{1}{2}, \qquad |\underset{t}{\mathrm{E}}(x_{n,\nu}\leqslant\lambda_{n,\nu})|\geqslant\tfrac{1}{2},$$

et $x'_{n,\nu}=x_{n,\nu}$ ou $x'_{n,\nu}=0$ suivant que $|x_{n,\nu}-\lambda_{n,\nu}|\leqslant K_n$ ou non.

En vertu du th. 3, il ne s'agit que de la suffisance de ces conditions. Or, la relation (6.2) entraîne la convergence uniforme dans tout intervalle fini de la suite des fonctions caractéristiques des fonctions $\sum x_{n,\nu}$, ce qui entraîne le résultat demandé d'après le théorème classique de M. P. Lévy[7]).

Ouvrages cités.

[1] A. Denjoy, C. R. Paris **196** (1933), p. 1713.

[2] M. Kac, *Sur les fonctions indépendantes*. Stud. Math. **6** (1936), p. 58-76.

[3] A. Kolmogoroff. Comptes Rendus de l'Académie Communiste (1929), p. 8-21.

[4] P. Lévy, *Variables aléatoires*, Paris 1937, p. XVII + 328.

[5] J. Marcinkiewicz et A. Zygmund, *Sur les fonctions indépendantes*. Fund. Math. **29** (1937), p. 60-90.

[6] J. Marcinkiewicz et A. Zygmund, *Quelques théorèmes sur les fonctions indépendantes*, Stud. Math. **7** (1937), p. 104-120.

[7]) Voir p. ex. Lévy [4], p. 37 et suivantes.

Eine Äquivalenz zwischen der Kontinuumhypothese und der Existenz der Lusinschen und Sierpińskischen Mengen.

Von

Fritz Rothberger (Wien).

Wir definieren, wie üblich[1]), eine Menge X habe die *Eigenschaft* **L** (und schreiben: $X \epsilon \mathbf{L}$), wenn jede nirgendsdichte Teilmenge von X abzählbar ist; und eine Menge Y habe die *Eigenschaft* **S** (oder: $Y \epsilon \mathbf{S}$), wenn jede Teilmenge vom Lebesgue'schen Masse Null abzählbar ist.

Aus der Kontinuumhypothese $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ folgt bekanntlich die Existenz zweier linearer Mengen X und Y von der Mächtigkeit des Kontinuums, wobei $X \epsilon \mathbf{L}$ und $Y \epsilon \mathbf{S}$ ist[2]).

In der vorliegenden Arbeit soll die Umkehrung dieses Satzes bewiesen werden (Korollar zu Satz 1).

Wir betrachten hier ausschliesslich lineare Punktmengen und bezeichnen mit $\mathfrak{R}$ die Menge der reellen Zahlen.

Lemma 1. *Wenn eine Menge von positivem äusserem Mass und von der Mächtigkeit $\aleph_1$ existiert, so lässt sich $\mathfrak{R}$ in $\aleph_1$ Teilmengen von I. Kategorie zerlegen.*

Lemma 2. *Wenn eine Menge von II. Kategorie mit der Mächtigkeit $\aleph_1$ existiert, so lässt sich $\mathfrak{R}$ in $\aleph_1$ Teilmengen vom Masse Null zerlegen.*

[1]) Vgl. etwa W. Sierpiński, *Hypothèse du continu*, Monografie Matematyczne **4**, Warszawa-Lwów 1934, p. 37 und 81.

[2]) W. Sierpiński, loc. cit., p. 29 ff., Proposition $\mathbf{P}_9$ und Proposition $\mathbf{P}_{9a}$.