References.

[1] Carleman T., *A Theorem Concerning Fourier Series*, Proc. London Math. Soc. **21** (1923), 483-492.

[2] Hardy G. H., and Littlewood J. E., *A maximal theorem with function theoretic applications*, Acta Math. **54** (1930), 81-116.

[3] Hardy G. H. and Littlewood J. E., *Sur la série de Fourier d'une fonction à carré sommable*, C. R. **156** (1913), 1307-1309.

[4] Kolmogoroff A., *Une série de Fourier-Lebesgue divergente presque partout*, Fund. Math. **4** (1923), 324-238.

[5] Littlewood J. E. and Paley R. E. A. C., *Theorems on Fourier series and power series (II)*. Proc. London Math. Soc. **42** (1937) 52-89.

[6] Paley R. E. A. C. and Zygmund A. *On some series of functions (III)* Proc. Cambridge Phil. Soc. 1932.

[7] Zalcwasser Z., *Sur la sommabilité des séries de Fourier*, Studia Math. **6** (1936), 82-88.

[8] Zygmund A., *A remark on conjugate series*, Proc. London Math. Soc. **34** (1932), 392-400.

[9] Zygmund A., *Trigonometrical Series* (Monografie Matematyczne V), Warszawa 1935.

[10] Zygmund A., *Proof of a theorem of Paley* (to appear in the Proc. Cambridge Phil. Soc. 1938).

Eine äquivalente Formulierung des Auswahlaxioms.

Von

Alfred Tarski (Warszawa).

Es sind heute mehrere Sätze bekannt, die auf Grund des Zermelo-Fraenkelschen Axiomensystems dem Auswahlaxiom äquivalent sind, so z. B. der Wohlordnungssatz, der Vergleichbarkeitssatz (d. i. der Satz der Trichotomie) sowie verschiedene Theoreme von speziellerem Charakter aus des Theorie der Gleichmächtigkeit und der Arithmetik der Kardinalzahlen [1]). Im vorliegenden Aufsatz möchte ich einen neuen Satz dieser Art formulieren, der seinem Inhalt nach sowohl dem Auswahlaxiom selbst als auch allen oben erwähnten Sätzen ziemlich ferne liegt [2]).

Dieser Satz lautet folgendermaßen

Satz $\mathfrak{S}$. Zu jeder Menge N gibt es eine Menge M, die folgender Bedingung genügt:

X ist dann und nur dann ein Element von M, wenn X eine Teilmenge von M ist und wenn dabei N mit keiner Teilmenge Y von X gleichmächtig ist.

Es soll nun gezeigt werden, daß der Satz $\mathfrak{S}$ dem Auswahlaxiom tatsächlich äquivalent ist [3]).

---

[1]) Vgl. hiezu F. Hartogs, *Über das Problem der Wohlordnung*, Math. Ann. **76** (1915), S. 438 ff., ferner meinen Aufsatz *Sur quelques théorèmes qui équivalent à l'axiome du choix*, Fund. Math. **5** (1924), S. 147 ff., sowie die gemeinsame Mitteilung von A. Lindenbaum und Verfasser, *Communication sur les recherches de la théorie des ensembles*, C. R. Soc. Sc. Vars. **19** (1926), S. 311 f.

[2]) Über das in diese Artikel vorgebrachte Ergebnis hat der Verfasser am 12. XI. 1937 in der Warschauer Sektion der Polnischen Mathematischen Gesellschaft berichtet.

[3]) Satz $\mathfrak{S}$ hängt mit einem Satz zusammen, der in meiner Arbeit *Über unerreichbare Zahlen*, dieser Band, S. 84, formuliert und dort als Axiom der unerreichbaren Mengen bezeichnet wurde. Mit Rücksicht hierauf sind die beiden Teile des hier gebrachten Beweises mit gewissen dortigen Überlegungen eng verknüpft, und zwar der I. Teil mit dem Beweis des Hilfssatzes 18 (S. 77 ff.) und der II. Teil mit der Ableitung des Auswahlaxioms aus dem Axiom der unerreichbaren Mengen (S. 85 ff.).

I. Die Ableitung des Satzes $\mathcal{S}$ aus dem Zermelo-Fraenkelschen Axiomensystem.

Es sei N eine beliebige Menge; wir bezeichnen ihre Mächtigkeit mit $\mathfrak{n}$:

(1) $$\overline{\overline{N}}=\mathfrak{n}$$ [4]).

Wir bestimmen ferner eine Kardinalzahl $\mathfrak{m}$ folgendermaßen:

(2) $$\mathfrak{m}=\aleph_0, \quad \textit{falls} \quad \mathfrak{n}<\aleph_0; \qquad \mathfrak{m}=2^{\mathfrak{n}}, \quad \textit{falls} \quad \mathfrak{n}\geqslant\aleph_0.$$

Da die Zahl $\mathfrak{m}$ unendlich ist, kann sie nach dem Wohlordnungssatz als die Mächtigkeit einer unendlichen wohlgeordneten Menge, d. i. als ein Alef, betrachtet werden. Es sei nun

(3) $$\mathfrak{m}=\aleph_\alpha.$$

Aus (2) und (3) ergibt sich leicht, daß

(4) $$\aleph_\alpha^{\mathfrak{n}}\leqslant\aleph_\alpha \quad (\textit{und sogar } \aleph_\alpha^{\mathfrak{n}}=\aleph_\alpha, \textit{ wenn nur } \mathfrak{n}\neq 0 \textit{ ist}).$$

Dem verallgemeinerten Satz von J. König zufolge gilt anderseits

(5) $$\aleph_\alpha^{\aleph_{cf(\alpha)}}>\aleph_\alpha$$ [5]).

Die Formeln (4) und (5) ergeben sofort: $\aleph_\alpha^{\mathfrak{n}}<\aleph_\alpha^{\aleph_{cf(\alpha)}}$, wonach

(6) $$\mathfrak{n}<\aleph_{cf(\alpha)}.$$

Wir definieren jetzt durch Rekurrenz eine transfinite Reihe von Mengen M_ξ in folgender Weise:

$$M_0=0;$$

(7) $$M_\xi=\underset{X}{E}\Big[X\subset{\sum_{\eta<\xi}}' M_\eta \textit{ und } \overline{\overline{X}}<\mathfrak{n}\Big] \quad \textit{für jedes } \xi, \textit{ so daß } 0<\xi<\omega_\alpha.$$

Wir setzen ferner:

(8) $$M={\sum_{\xi<\omega_\alpha}}' M_\xi.$$

[4]) Der Einfachheit wegen wird im I. Teile des Beweises das Operieren mit Kardinal- und Ordnungszahlen nicht vermieden; man könnte aber freilich auch ohne diese Hilfsmittel auskommen.

[5]) Vgl. hiezu A. Schoenflies, *Entwickelung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen*, Leipzig und Berlin 1913, S. 138. Das Symbol „$cf(\alpha)$" bezeichnet den Index der kleinsten Anfangszahl, mit der die Zahl ω_α konfinal ist.

[Die Existenz aller Mengen M_ξ und ihrer Summe M ergibt sich aus dem Fraenkelschen Ersetzungsaxiom, das somit in der vorliegenden Überlegung eine wesentliche Rolle spielt].

Betrachten wir nun eine beliebige Menge $X\subset M$, derart daß N mit keiner Teilmenge $Y\subset X$ gleichmächtig ist. Wegen (1) ist also die Formel: $\overline{\overline{X}}\geqslant\mathfrak{n}$ falsch; nach dem Vergleichbarkeitssatz haben wir folglich $\overline{\overline{X}}<\mathfrak{n}$. Mit Rücksicht auf (6) und (8) erhalten wir daraus:

$$\overline{\overline{X}}<\aleph_{cf(\alpha)} \qquad \textit{und} \qquad X\subset{\sum_{\xi<\omega_\alpha}}' M_\xi.$$

Durch Anwendung eines bekannten Satzes [6]) schließen wir hieraus auf die Existenz einer Zahl ξ, $0<\xi<\omega_\alpha$, für die

$$X\subset{\sum_{\eta<\xi}}' M_\eta$$

gilt. Da hiebei $\overline{\overline{X}}<\mathfrak{n}$ ist, so ergibt sich aus (7): $X\in M_\xi$ und hienach auf Grund von (8): $X\in M$.

Somit ist Folgendes gezeigt:

(9) *ist $X\subset M$ und ist N mit keiner Menge $Y\subset X$ gleichmächtig, so ist $X\in M$.*

Um die inverse Implikation zu begründen, betrachte man ein beliebiges Element X von M. Nach (8) gibt es eine Zahl $\xi<\omega_\alpha$, so daß $X\in M_\xi$; aus (7) folgt, daß $\xi<0$ sein muß und daß demnach

$$X\subset{\sum_{\eta<\xi}}' M_\eta \qquad \textit{und} \qquad \overline{\overline{X}}<\mathfrak{n}$$

ist. Auf Grund von (8) und (1) ergibt sich hieraus sofort, daß $X\subset M$ und daß N mit keiner Menge $Y\subset X$ gleichmächtig ist. Es gilt also:

(10) *ist $X\in M$, so ist $X\subset M$ und N ist mit keiner Menge $Y\subset X$ gleichmächtig.*

Wir haben somit eine Menge M konstruiert, die mit Rücksicht auf (9) und (10) der Behauptung des Satzes $\mathcal{S}$ genügt.

[6]) Vgl. hiezu meine Arbeit *Sur les classes d'ensembles closes par rapport à certaines opérations élémentaires*, Fund. Math. **16** (1930), S. 185 f. (Lemme 3[6]).

II. Die Ableitung des Auswahlaxioms aus Satz $\mathfrak{S}$ (mit Hilfe der übrigen Zermelo-Fraenkelschen Axiome).

Bekanntlich ist das Auswahlaxiom eine unmittelbare Folgerung aus dem Wohlordnungssatz; es genügt also, diesen aus Satz $\mathfrak{S}$ herzuleiten.

Zu diesem Zweck wollen wir uns gewisser Mengen bedienen, die J. v. Neumann als Ordnungszahlen bezeichnet [7]); das sind nämlich solche Mengen (genauer: Mengensysteme) X, die durch die Relation der Inklusion (genauer: durch die Relation „ist ein eigentlicher Teil von") wohlgeordnet sind und dabei folgender Bedingung genügen:

$$\textit{ist } Y \in X, \textit{ so ist } Y = \underset{Z}{E}[Z \in X,\ Z \subset Y \textit{ und } Z \neq Y].$$

Den soeben definierten Ordnungszahlen kommen u. a. folgende Eigenschaften zu (die ohne Auswahlaxiom begründet werden können):

(11) *X ist dann und nur dann eine Ordnungszahl, wenn*

$$X \subset \underset{Y}{E}[Y \textit{ ist eine Ordnungszahl und } Y \subset X];$$

(12) *ist X eine Ordnungszahl, so ist nicht $X \in X$;*

(13) *jede Menge von Ordnungszahlen ist durch die Relation der Inklusion wohlgeordnet* [8]).

Es sei nun N eine beliebige Menge. Gemäß Satz $\mathfrak{S}$ gibt es eine Menge M, die der Bedingung (9) genügt (von der Bedingung (10) wollen wir hier keinen Gebrauch machen). Setzen wir:

(14) $$P = \underset{X}{E}[X \textit{ ist eine Ordnungszahl und } X \subset M].$$

---

[7]) Vgl. J. v. Neumann, *Zur Einführung der transfiniten Zahlen*, Act. Litt. Sc. Univ. Szeged **1** (1923), S. 199 ff., insbesondere S. 203 (Satz 9). Zum Folgenden vgl. auch J. v. Neumann, *Die Axiomatisierung der Mengenlehre*, Math. Ztschr. **27** (1928), S. 726 ff. Man kann übrigens die vorliegende Betrachtung noch etwas anders gestalten und zwar sie dem zweiten Zermeloschen Beweis des Wohlordnungssatzes annähern, ohne die v. Neumannschen Ordnungszahlen explizite einzuführen; vgl. hiezu meine oben zitierte Arbeit *Über unerreichbare Kardinalzahlen*, S. 85 ff.

[8]) Vgl. die oben zitierte Abhandlung von J. v. Neumann, *Zur Einführung der transfiniten Zahlen*, S. 203 ff. (Sätze 10, 12 und 13).

Betrachten wir ein beliebiges Element $X \in P$. Nach (14) ist X eine Ordnungszahl und $X \subset M$. Ist also Y ein Element von X, so folgt aus (11), daß auch Y eine Ordnungszahl ist und daß $Y \subset X \subset M$; mit Rücksicht auf (14) ist demnach $Y \in P$. Folglich ist $X \subset P$. Da nun jedes Element von P eine Ordnungszahl und zugleich eine Teilmenge von P ist, so gilt nach (11):

(15) *P ist eine Ordnungszahl.*

Nehmen wir nun an, die Menge N sei mit keiner Teilmenge von P gleichmächtig. Ist X ein beliebiges Element von P, so ist, wie wir bereits wissen, $X \subset P$; demnach ist N weder mit X selbst noch mit einer Menge $Y \subset X$ gleichmächtig. Da hiebei nach (14) $X \subset M$ ist, so folgt aus (9), daß $X \in M$. Es gilt demnach: $P \subset M$. Mit Hilfe von (14) und (15) schließen wir hieraus, daß $P \in P$; dies steht aber im Widerspruch zu (12), da ja P eine Ordnungszahl ist.

Dadurch ist unsere Annahme widerlegt: N muß mit einer Teilmenge von P gleichmächtig sein. Nun ist aber P auf Grund von (13) und (14) eine wohlgeordnete Menge; demnach muß auch die Menge N wohlordnungsfähig sein.

Wir haben also unser Ziel erreicht: wir haben nämlich aus Satz $\mathfrak{S}$ gefolgert, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann. Somit ist der Beweis, daß Satz $\mathfrak{S}$ dem Auswahlaxiom äquivalent ist, zu Ende geführt.

Bemerkung 1. Im II. Teil des eben skizzierten Beweises wurde zugleich folgender Satz implizite abgeleitet (und zwar ohne Verwendung des Auswahlaxioms und des Satzes $\mathfrak{S}$):

Es seien M und N zwei Mengen, die folgender Bedingung genügen:
ist $X \subset M$ und ist N mit keiner Teilmenge von X gleichmächtig, so ist $X \in M$.

Unter dieser Voraussetzung enthält M eine durch die Relation der Inklusion wohlgeordnete Teilmenge, die mit N gleichmächtig ist.

Bemerkung 2. Mit Rücksicht auf den I. Teil des Beweises und auf die Bemerkung 1 ist nicht nur der Satz $\mathfrak{S}$, sondern auch der folgende (logisch schwächere) Satz dem Auswahlaxiom äquivalent:

Satz $\mathfrak{S}'$. Zu jeder Menge N gibt es eine Menge M, die folgender Bedingung genügt:
ist $X \subset M$ und ist N mit keiner Teilmenge von X gleichmächtig, so ist $X \in M$.
