Über die Zusammensetzung von Polynomen.

Von

Hans Fried (Wien).

Herr W. Sierpiński hat die Frage gestellt, ob es für jede Bairesche Funktion erster Klasse $f(x)$ eine Darstellung

$$f(x)=\lim_{n=\infty} P_1 P_2 \dots P_n(x)$$

gibt, wobei $P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x) \dots$ Polynome sind[1]). In vorliegender Arbeit wird diese Frage in bejahendem Sinne beantwortet.

Ein Polynom $P(x)$ werde als *speziell* bezeichnet, wenn es ein Intervall $[x_1, x_2]$ [2]) gibt, so dass

$$\begin{aligned} (1) \qquad & x_1<0,\ P(x_1)=0,\quad P(x) \text{ für } x<x_1 \text{ monoton zunehmend,} \\ & x_2>0,\ P(x_2)=0,\quad P(x) \text{ für } x>x_2 \text{ monoton zunehmend} \end{aligned}$$

ist. Das Intervall $[x_1, x_2]$ werde als das zum Polynom gehörige Intervall bezeichnet.

I. Hilfssatz. *Sind $P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x)$ n spezielle Polynome, so ist auch $P_1 P_2 \dots P_n(x)$ ein spezielles Polynom.*

Beweis. Für $n=2$ sei $[x_1^{(1)}, x_2^{(1)}]$ das zu $P_1(x)$ und $[x_1^{(2)}, x_2^{(2)}]$ das zu $P_2(x)$ gehörige Intervall. Wegen (1) gibt es einen Punkt $\xi_2>x_2^{(2)}>0$, so dass $P_2(\xi_2)=x_2^{(1)}$, woraus $P_1 P_2(\xi_2)=0$ folgt. $P_2(x)$ ist für $x>\xi_2$ monoton zunehmend, daher auch $P_1 P_2(x)$ für $x>\xi_2$.

[1]) Fund. Math. **24** (1935), S. 1, Wie Herr Sierpiński in C. R. Soc. Sc. Varsovie **26** (1933), S. 1-3, bewiesen hat, gibt es Funktionen $f(x)$ von der I. Baireschen Klasse, die sich nicht in der Gestalt $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n f_{n-1} \dots f_2 f_1(x)$, wobei $f_1(x), f_2(x), \dots$ stetige Funktionen sind, darstellen lassen. Als Beispiel können eineindeutige nicht monotone $f(x)$ gelten.

[2]) $[x_1, x_2]$ bedeute immer ein abgeschlossenes, (x_1, x_2) ein offenes Intervall; es sei $x_1<v_2$.

In gleicher Weise wird die Existenz eines Punktes $\xi_1<0$ gezeigt, so dass $P_1 P_2(\xi_1)=0$ und $P_1 P_2(x)$ für $x<\xi_1$ monoton zunehmend ist. $P_1 P_2(x)$ ist somit ein spezielles Polynom mit dem dazugehörigen Intervall $[\xi_1, \xi_2]$.

Der Beweis für jedes endliche n wird in gleicher Weise mit Hilfe des Schlusses von $n-1$ auf n geführt.

II. Hilfssatz: *Zu jedem $\varepsilon>0$, zu jeder natürlichen Zahl n und zu jeder in $[-n, n]$ definiert stetigen Funktion $f(x)$ gibt es ein spezielles Polynom $P(x)$, so dass*

$$(2) \qquad |f(x)-P(x)|<\varepsilon \qquad \textit{für} \quad x \in [-n, n].$$

Beweis. Nach einem Satz von Weierstrass[3]) gibt es ein Polynom $Q_1(x)$, so dass

$$(3) \qquad |f(x)-Q_1(x)|<\varepsilon/3 \qquad \text{für} \quad x \in [-n, n].$$

$Q_1(x)$ habe den Grad r. Es sei $r' \geqslant r/2$ eine natürliche Zahl und

$$(4) \qquad Q_2(x)=Q_1(x)-\alpha x^{2r'+1} \quad \text{wobei} \quad 0<\alpha<\varepsilon/3n^{2r'+1}.$$

Es ist $|Q_1(x)-Q_2(x)|=\alpha|x^{2r'+1}|$, daher wegen (4)

$$(5) \qquad |Q_1(x)-Q_2(x)| \leqslant \alpha n^{2r'+1}<\varepsilon/3 \qquad \text{für} \quad x \in [-n, n].$$

Da der Grad von $Q_2(x)$ umgerade ist und der Koeffizient der höchsten Potenz von x negativ ist, gibt es eine Zahl

$$(6) \qquad s>n,$$

so dass

$$\begin{aligned} (7) \qquad & Q_2(x)<0 \text{ und monoton abnehmend für } x>s, \\ & Q_2(x)>0 \text{ und monoton abnehmend für } x<-s \textit{ ist.} \end{aligned}$$

Es sei

$$(8) \qquad P(x)=Q_2(x)\,(1-\beta x^2),$$

wobei $0<\beta=\min\left[\dfrac{\varepsilon}{3An^2}, \dfrac{1}{s^2}\right]$ und A eine Zahl ist, so dass $|Q_2(x)|<A$ für $x \in [-n, n]$. Das Polynom $P(x)$ erfüllt die Behauptung des II. Hilfssatzes. Es ist wegen (8)

$$(9) \qquad |Q_2(x)-P(x)|=|\beta x^2 Q_2(x)|<\beta n^2 A \leqslant \varepsilon/3 \qquad \text{für} \quad x \in [-n, n].$$

[3]) E. Borel: *Leçons sur les fonctions de variables réelles*, Paris 1905, S. 50.

Aus (3), (5) und (9) folgt (2). Es ist noch zu zeigen, dass $P(x)$ ein spezielles Polynom ist. Aus (8) folgt $P(x)=0$ für $x=\pm 1/\sqrt{\beta}$. Es ist[4]) $P'(x)=Q_2'(x)(1-\beta x^2)-2\beta x Q_2(x)$. Wegen (8) ist $1/\sqrt{\beta}\geqslant s$, so dass wegen (7) $Q_2'(x)(1-\beta x^2)>0$, $2\beta x Q_2(x)<0$ für $|x|>1/\sqrt{\beta}$, daher $P'(x)>0$ für $|x|>1/\sqrt{\beta}$.

Somit ist $P(x)$ ein spezielles Polynom mit dem dazugehörigen Intervall $[-1/\sqrt{\beta}, 1/\sqrt{\beta}]$.

III. Hilfssatz: *Ist n eine natürliche Zahl, $P_1(x)$ ein spezielles Polynom, $Q(x)$ ein Polynom,*

$$A=[-n,n]-\underset{x}{E}[0<Q(x)<1/2n] \tag{10}$$

und C eine beliebige nirgends dichte Menge, so gibt es ein spezielles Polynom $P_2(x)$, so dass

$$|Q(x)-P_1P_2(x)|<1/n \qquad \text{für} \quad x\in A+C\cdot[-n,n]. \tag{11}$$

B e w e i s. Ich werde zunächst eine in $[-n,n]$ definierte stetige Funktion $f(x)$ konstruieren, so dass

$$|Q(x)-P_1f(x)|<1/2n \qquad \text{für} \quad x\in A+C\cdot[-n,n]. \tag{12}$$

Da $P_1(x)$ ein spezielles Polynom ist, gibt es ein Intervall $[x_1,x_2]$, wo $x_1<0$, $x_2>0$, so dass

$$\begin{aligned} &P_1(x_1)=0,\ P_1(x) \text{ für } x<x_1 \text{ monoton zunehmend,}\\ &P_1(x_2)=0,\ P_1(x) \text{ für } x>x_2 \text{ monoton zunehmend} \end{aligned} \tag{13}$$

ist. Es gibt somit einen Punkt $x_3>x_2$, so daß

$$P_1(x_3)=1/2n. \tag{14}$$

Wenn die Menge A leer ist, d. h. nach (10), dass für jedes $x\in[-n,n]$ $0<Q(x)<1/1n$ sei, werde $f(x)=x_2$ für $x\in[-n,n]$ gesetzt. Wegen (13) ist (12) erfüllt.

Wenn die Menge A nicht leer ist, setzt sie sich aus endlich vielen abgeschlossenen Teilintervallen von $[-n,n]$ zusammen, in deren Endpunkten, wenn sie von n oder $-n$ verschieden sind, $Q(x)$ die Werte 0 oder $1/2n$ annimmt. Es sei

$$\overline{P}_1(x)=P_2(x) \qquad \text{für} \quad x\leqslant x_1, \quad x\geqslant x_3.$$

[4]) $P'(x)$ bedeutet die Ableitung von $P(x)$.

$\overline{P}_1^{-1}(x)$ ist wegen (13) und (14) eine für $x\leqslant 0$, $x\geqslant 1/2n$ definierte, stetige Funktion. Es sei

$$f(x)=\overline{P}_1^{-1}Q(x) \qquad \text{für} \quad x\in A.$$

$f(x)$ ist eine auf endlich vielen abgeschlossenen Intervallen definierte stetige Funktion, die in den Endpunkten der Intervalle, wenn sie vom n oder $-n$ verschieden sind, die Werte x_1 oder x_3 annimmt. Da

$$P_1f(x)=\overline{P}_1\overline{P}_1^{-1}Q(x)=Q(x) \qquad \text{für} \quad x\in A, \tag{15}$$

ist für $x\in A$ (12) erfüllt.

$f(x)$ werde nun zu einer in dem Intervall $[-n,n]$ stetigen Funktion wie folgt erweitert.

Wenn $-n$ non $\in A$ und $x'=\liminf A$, sei $f(x)=f(x')$ für

$$-n\leqslant x\leqslant x'.$$

Wenn n non $\in A$ und $x'=\limsup A$, sei $f(x)=f(x')$ für $x'\leqslant x\leqslant n$.

Wenn $(a,b)\cdot A=0$, $a\in A$, $b\in A$, $f(a)=f(b)$, sei $f(x)=f(a)$ für $a\leqslant x\leqslant b$.

Wenn $(a,b)\cdot A=0$, $a\in A$, $b\in A$, $f(a)\neq f(b)$ gibt es, da C nirgends dicht ist, ein Intervall $[a',b']<(a,b)$, so dass $[a'b']$ keinen Punkt von C enthält. Es sei:

$$\begin{aligned} &f(x)=f(a) && \text{für} && a\leqslant x\leqslant a',\\ &f(x)=f(b) && \text{für} && b'\leqslant x\leqslant b,\\ &f(x) \text{ linear} && \text{für} && a'\leqslant x\leqslant b' \end{aligned}$$

In jedem Punkt $x\in C\cdot[-n,n]$, der nicht der Menge A angehört, nimmt $f(x)$ die Werte x_1 oder x_3 an; es ist wegen (13) und (14) für einen derartigen Punkt $P_1f(x)$ entweder 0 oder $1/2n$ und da für einen solchen Punkt $0<Q(x)<1/2n$, gilt (12).

Es sei

$$|f[-n,n]=[\alpha,\beta]. \tag{16}$$

Da das Polynom $P_1(x)$ in $[\alpha-1,\beta+1]$ gleichmäßig stetig ist, gibt es ein positives $\varepsilon<1$ so dass für zwei beliebige Punkte x' und x'' aus dem Intervall $[\alpha-1,\beta+1]$ aus $|x''-x'|<\varepsilon$

$$|P_1(x'')-P_1(x')|<1/2n \tag{17}$$

folgt. Nach dem II. Hilfssatz gibt es ein spezielles Polynom $P_2(x)$, so dass

$$|f(x)-P_2(x)|<\varepsilon \qquad \text{für} \quad x\in[-n,n]. \tag{18}$$

Aus (16), (17) und (18) folgt

(19) $$|P_1f(x)-P_1P_2(x)|<1/2n \quad \text{für} \quad x\epsilon[n,n].$$

Aus (12) und (19) folgt (11), womit III. Hilfssatz bewiesen ist.

Hauptsatz. *Ist $f(x)$ eine Bairesche Funktion von erster Klasse, so gibt es eine Darstellung*

$$f(x)=\lim_{n=\infty} P_1P_2\dots P_n(x),$$

wobei $P_1(x),P_2(x),\dots,P_n(x)$ Polynome sind.

Beweis. Es gibt eine Zahl a, so dass $\underset{x}{E}[f(x)=a]$ eine nirgendsdichte Menge ist. Angenommen $\underset{x}{E}[f(x)=a]$ sei für jedes reelle a eine nicht nirgendsdichte Menge. Es müsste für jedes a ein offenes Intervall I_a geben, so dass $\underset{x}{E}[f(x)=a]$ in I_a dicht wäre. Da es nur abzählbar viele fremde offene Intervalle gibt, lassen sich zwei Zahlen b und c finden, so dass $I_b\cdot I_c\neq 0$. In dem Intervall $I_b\cdot I_c$ ist sowohl $\underset{x}{E}[f(x)=b]$ als und $\underset{x}{E}[f(x)=c]$ dicht, daher muss in jedem Punkt von $I_b\cdot I_c$ die Schwenkung von $f(x)$ grösser oder gleich $|b-c|$ sein; dies steht aber im Widerspruch mit der Tatsache, dass $f(x)$ als Funktion erster Klasse punktweise umstetig ist.

Für die Funktion $\varphi(x)=f(x)-a$ ist die Menge $\underset{x}{E}[\varphi(x)=0]$ nirgends dicht. Wenn es eine Darstellung $\varphi(x)=\lim\limits_{n=\infty} P_1P_2\dots P_n(x)$ gibt, wobei $P_1(x),P_2(x),\dots,P_n(x)$ Polynome sind, so gilt die Darstellung

$$f(x)=\lim_{n=\infty} \overline{P}_1,P_2,\dots,P_n(x),$$

wobei $\overline{P}_1(x)=P_1(x)+a$. Beim Beweis des Hauptsatzes genügt es daher anzunehmen, dass die Menge $\underset{x}{E}[f(x)=0]$ nirgends dicht ist. Es gibt eine Darstellung

(20) $$f(x)=\lim_{n=\infty} Q_n(x),$$

wobei $Q_1(x),Q_2(x),\dots,Q_n(x),\dots$ Polynome sind [5]). Es sei $P_1(x)$ irgend ein spezielles Polynom,

(21) $$A_n=[-n,n]-\underset{x}{E}[0<Q_n(x)<1/2n],$$
$$C_n=[-n,n]\cdot\underset{x}{E}[f(x)=0] \quad \text{für} \quad n\geqslant 2.$$

[5]) E. Borel, l. c. S. 99.

Nach dem III. Hilfssatz gibt es ein spezielles Polynom $P_2(x)$, so dass

(22) $$|Q_2(x)-P_1P_2(x)|<1/2 \quad \text{für} \quad x\epsilon A_2+C_2.$$

Nun zeige ich, dass es für jede natürliche Zahl $n\geqslant 2$ ein spezielles Polynom $P_n(x)$ gibt, so dass

(23) $$|Q_n(x)-P_1P_2\dots P_n(x)|<1/n \quad \text{für} \quad x\epsilon A_n+C_n.$$

Für $n=2$ ist die Behauptung nach (22) richtig. Angenommen, sie sei für alle n', für die $2\leqslant n'\leqslant n-1$ $(n\geqslant 3)$, richtig; ich zeige, dass sie dann auch für n richtig ist. Nach Voraussetzung gibt es für $n'=2,3,\dots,n-1$ spezielle Polynome $P_{n'}(x)$, so dass

$$|Q_{n'}(x)-P_1P_2\dots P_{n'}(x)|<1/n', \quad \text{für} \quad x\epsilon A_{n'}+C_{n'}.$$

Nach dem I. Hilfssatz ist das Polynom $\overline{P}(x)=P_1P_2\dots P_{n-1}(x)$ ein spezielles Polynom. Nach dem III. Hilfssatz gibt es ein spezielles Polynom $P_n(x)$, so dass

$$|Q_n(x)-\overline{P}P_n(x)|<1/n \quad \text{für} \quad x\epsilon A_n+C_n,$$

was gleichbedeutend mit (23) ist.

Es gilt $f(x)=\lim\limits_{n=\infty} P_1P_2\dots P_n(x)$. Es sei x_0 ein beliebiger Punkt. Wenn $f(x_0)\neq 0$ sei n_1 eine natürliche Zahl so dass $x_0\epsilon[-n_1,n_1]$. Wegen (20) gibt es eine natürliche Zahl n_2, so dass für $n\geqslant n_2$ x_0 non $\epsilon\,\underset{n}{E}[0<Q_n(x)<1/2n]$; daher ist nach (21) für $n\geqslant\max(n_1,n_2)$ $x_0\epsilon A_n$, somit wegen (23)

(24) $$|Q_n(x_0)-P_1P_2\dots P_n(x_0)|<1/n \quad \text{für fast alle } n$$

und daher wegen (20)

(25) $$f(x_0)=\lim_{n=\infty} P_1P_2\dots P_n(x_0).$$

Wenn $f(x_0)=0$, gibt es nach (21) eine natürliche Zahl n_1, so dass für $n\geqslant n_1$ $x_0\epsilon C_n$; daher ist wegen (23) die Ungleichung (24) erfüllt, woraus (25) folgt.