Ein Überdeckungssatz für endliche Mengen

nebst einigen Bemerkungen über die Definitionen der Endlichkeit.

Von

Alfred Tarski (Warszawa).

In einem Aufsatz, der in diesem Bande erschienen ist [1]), habe ich drei Überdeckungssätze aus dem Gebiet der allgemeinen Mengenlehre angegeben. Da diese Sätze in der dort gegebenen Formulierung im wesentlichen nur unendliche Mengen betreffen, möchte ich hier einen analogen Satz aufstellen, der sich auf endliche Mengen bezieht.

In Anknüpfung an diesen Satz möchte ich ferner einige Bemerkungen machen, die die Definitionen der Endlichkeit und ihren Zusammenhang mit gewissen Grundlagenfragen der Mengenlehre betreffen.

§ 1. *Satz 1 (Überdeckungssatz für endliche Mengen). Es seien:* $\mathfrak{m}$ *eine Kardinalzahl,* N *eine Menge und* $\boldsymbol{S}$ *ein Mengensystem, die folgenden Bedingungen genügen:*

(i) *die Menge* N *ist endlich;*

(ii) *jedes System* $\boldsymbol{T}\subset\boldsymbol{Pt}(N)-\boldsymbol{S}$ [2]) *von nicht leeren paarweise fremden Mengen hat eine Mächtigkeit* $\leqslant\mathfrak{m}$;

(iii) $N\subset\sum\limits_{X\epsilon\boldsymbol{S}}X.$

Unter diesen Voraussetzungen gibt es ein System $\boldsymbol{M}\subset\boldsymbol{S}$ *mit einer Mächtigkeit* $\leqslant 2\cdot\mathfrak{m}+1$, *so daß* $N\subset\sum\limits_{X\epsilon\boldsymbol{M}}X.$

[1]) *Drei Überdeckungssätze der allgemeinen Mengenlehre*, dieser Band, S. 132 ff.

[2]) Mit „$\boldsymbol{Pt}(N)$" bezeichnen wir hier die Potenzmenge der Menge N, d. h. das System aller Teilmengen von N.

Beweis [3]). Wir verwenden ein Induktionsverfahren in Bezug auf die Zahl $\mathfrak{m}$.

I. *Der Satz gilt für* $\mathfrak{m}=0$. Ist in der Tat $\mathfrak{m}=0$, so bedeutet die Voraussetzung (ii), daß jede nicht leere Menge $X\subset N$ zu $\boldsymbol{S}$ gehören muß. Ist also N selbst nicht leer, so ist $N\epsilon\boldsymbol{S}$; setzt man demnach $\boldsymbol{M}=\{N\}$, so gewinnt man ein System, das der Behauptung des Satzes genügt. Ist aber N leer, so wird diese Behauptung durch das leere Mengensystem erfüllt.

II. *Ist* $\mathfrak{m}$ *eine endliche von* 0 *verschiedene Kardinalzahl und gilt der Satz für die Zahl* $\mathfrak{m}-1$, *so gilt er auch für die Zahl* $\mathfrak{m}$. Um dies nachzuweisen, kann man annehmen, daß N weder leer noch in einer Menge $Y\epsilon\boldsymbol{S}$ enthalten ist (da sonst entweder das leere Mengensystem oder das System $\boldsymbol{M}=\{Y\}$ der Behauptung des Satzes genügen würde). Es gibt also nicht leere Mengen $X\subset N$, die in keiner Menge $Y\epsilon\boldsymbol{S}$ enthalten sind. Da nun N nach der Voraussetzung (i) endlich ist, so muß im Einklang mit einer bekannten Definition der Endlichkeit [4]) eine irreduzible Menge von dieser Beschaffenheit existieren, d. h. eine Menge N_1, die folgenden Bedingungen genügt:

(1) $N_1\subset N$, $\quad N_1\neq 0\quad$ *und* $\quad N_1$ *non* $\subset Y\quad$ *für jedes* $\quad Y\epsilon\boldsymbol{S}$;

(2) *es gibt keine Menge* X, *so daß* $X\subset N_1$, $X\neq N_1$, $X\neq 0$ *und* X *non* $\subset Y$ *für jedes* $Y\epsilon\boldsymbol{S}$.

Es sei mit Rücksicht auf (1) $n\epsilon N_1$. Da nach (1) und (iii) $N_1\subset N\subset\sum\limits_{X\epsilon\boldsymbol{S}}X$, so gibt es eine Menge $Y_1\epsilon\boldsymbol{S}$, die n als Element enthält. Man hat ferner $N_1-\{n\}\subset N_1$ und $N_1-\{n\}\neq N_1$ [5]); ist also $N_1-\{n\}\neq 0$, so ergibt sich aus (2) die Existenz einer Menge $Y_2\epsilon\boldsymbol{S}$, so daß $N_1-\{n\}\subset Y_2$. Eine solche Menge Y_2 existiert aber offenbar auch dann, wenn $N_1-\{n\}$ leer ist: es genügt ja z. B. $Y_2=Y_1$ zu setzen. Da $N_1=\{n\}+(N_1-\{n\})$, so folgt daraus, daß $N_1\subset Y_1+Y_2$. Somit haben wir folgendes festgestellt:

[3]) Mein ursprünglicher Beweis war etwas komplizierter und erinnerte an die Beweise aus dem oben zitierten Aufsatz (vgl. l. cit., S. 142, Bemerkung zu Hilfssatz 9). Die Idee des vorliegenden Beweises wurde mir von Herrn Lindenbaum mitgeteilt.

[4]) Vgl. z. B. meine Arbeit *Sur les ensembles finis*, Fund. Math. **6** (1924), S. 49 (Définition 3).

[5]) Das Symbol „$\{x\}$" bezeichnet die Menge, die aus N als aus dem einzigen Element besteht; analog das Symbol „$\{x,y\}$".

(3) *es gibt Mengen* Y_1 *und* Y_2, *derart daß* $Y_1 \in \boldsymbol{S}$, $Y_2 \in \boldsymbol{S}$ *und* $N_1 \subset Y_1 + Y_2$.

Betrachten wir nun die Menge $N - N_1$. Sie ist offensichtlich eine endliche Menge, die in $\sum'_{X \in \boldsymbol{S}} X$ enthalten ist. Ferner muß jedes System $\boldsymbol{T}' \subset \boldsymbol{Pt}(N - N_1) - \boldsymbol{S}$ von nicht leeren paarweise fremden Mengen eine Mächtigkeit $\leqslant \mathfrak{m} - 1$ haben; denn im entgegengesetzten Fall könnte man $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}' + \{N_1\}$ setzen und dadurch, mit Rücksicht auf (1), ein System $\boldsymbol{T} \subset \boldsymbol{Pt}(N) - \boldsymbol{S}$ von nicht leeren paarweise fremden Mengen gewinnen, dessen Mächtigkeit, im Widerspruch zu (ii), $> \mathfrak{m}$ wäre. Die Zahl $\mathfrak{m} - 1$, die Menge $N - N_1$ und das System $\boldsymbol{S}$ genügen somit allen Voraussetzungen des zu beweisenden Satzes. Da wir in II angenommen haben, daß der Satz für $\mathfrak{m} - 1$ gilt, so ergibt sich hieraus die Existenz eines Systems $\boldsymbol{M}'$, das folgende Bedingungen erfüllt:

(4) $$\boldsymbol{M}' \subset \boldsymbol{S}, \quad \overline{\overline{\boldsymbol{M}'}} \leqslant 2 \cdot (\mathfrak{m} - 1) + 1 = 2 \cdot \mathfrak{m} - 1 \quad \textit{und} \quad N - N_1 \subset \sum'_{X \in \boldsymbol{M}'} X.$$

Setzt man nun: $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}' + \{Y_1, Y_2\}$, so gewinnt man sofort aus (3) und (4):

$$\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{S}, \quad \overline{\overline{\boldsymbol{M}}} \leqslant 2 \cdot \mathfrak{m} - 1 + 2 = 2 \cdot \mathfrak{m} + 1 \quad \textit{und} \quad N \subset \sum'_{X \in \boldsymbol{M}'} X + Y_1 + Y_2 = \sum'_{X \in \boldsymbol{M}} X.$$

Das System $\boldsymbol{M}$ genügt somit der Behauptung des betrachteten Satzes, und II ist bewiesen.

Mit Hilfe der vollständigen Induktion schließt man aus I und II, daß der in Rede stehende Satz für jede endliche Kardinalzahl $\mathfrak{m}$ gilt. Für ein unendliches $\mathfrak{m}$ ist aber der Satz ganz trivial (mit Rücksicht auf die Endlichkeit von N). Damit ist der Beweis zu Ende geführt.

Bemerkung 1. In der Behauptung des Satzes 1 kann die Zahl $2 \cdot \mathfrak{m} + 1$ nicht herabgesetzt werden. Man kann es sich leicht am Beispiel einer Menge N klarmachen, die genau $2 \cdot \mathfrak{m} + 1$ Elemente enthält; als $\boldsymbol{S}$ wird dabei das System gewählt, das aus allen Mengen $\{x\}$, $x \in N$, besteht.

Satz 1 kann in denselben Richtungen umgeformt und verallgemeinert werden wie die Überdeckungssätze für unendliche Mengen. Es gelten nämlich folgende Korollare:

Korollar 1. *Unter den Voraussetzungen* (i) *und* (ii) *des Satzes 1 gibt es ein System* $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{S}$, *so daß* $\overline{\overline{\boldsymbol{M}}} \leqslant 2 \cdot \mathfrak{m} + 1$ *und* $\overline{\overline{N - \sum'_{X \in \boldsymbol{M}} X}} \leqslant \mathfrak{m}$ *ist.*

Korollar 2. *Satz 1 bleibt gültig, wenn man in ihm die Voraussetzungen* (i) *und* (iii) *durch folgende Voraussetzung ersetzt:*

(i′) *es gibt ein endliches System* $\boldsymbol{P} \subset \boldsymbol{S}$, *so daß* $N \subset \sum'_{X \in \boldsymbol{P}} X$.

Die Beweise dieser Korollare sind den Beweisen der Korollare 1 und 2 aus dem anfangs zitierten Aufsatz völlig analog.

Der Überdeckungssatz für endliche Mengen und der erste Überdeckungssatz für unendliche Mengen[1]) können in einen Satz zusammengefaßt werden, der folgendermaßen lautet:

Korollar 3. *Die Behauptung des Überdeckungssatzes für endliche Mengen gilt für jede Kardinalzahl* $\mathfrak{m}$, *jede Menge* N *und jedes Mengensystem* $\boldsymbol{S}$, *die den Voraussetzungen* (i)-(iii) *des ersten Überdeckungssatzes für unendliche Mengen genügen.*

Der Beweis leuchtet ein (die Voraussetzungen (ii) und (iii) sind in beiden in Frage kommenden Sätzen identisch; aus der Definition 1 meines anfangs zitierten Aufsatzes ersieht man sofort, daß eine Menge N, deren Mächtigkeit von einer endlichen Zahl $\mathfrak{m}$ aus stark erreichbar ist, selbst endlich sein muß).

Der Überdeckungssatz für endliche Mengen kann als ein Satz ausgesprochen werden, der eine notwendige Bedingung für die Endlichkeit einer Menge ausdrückt. In dieser Fassung ist der betrachtete Satz umkehrbar; wir wollen dies für den Fall $\mathfrak{m} = 1$ nachweisen:

Satz 2. *Eine Menge* N *ist dann und nur dann endlich, wenn sie folgender Bedingung genügt:*

(i) *ist* $\boldsymbol{S}$ *ein nicht leeres Mengensystem, welches von je zwei elementfremden Teilmengen von* N *mindestens eine als Element enthält und wo* $N \subset \sum'_{X \in \boldsymbol{S}} X$ *ist, so gibt es drei (nicht notwendig verschiedene) Mengen* X_1, X_2 *und* X_3 *des Systems* $\boldsymbol{S}$, *für die* $N \subset X_1 + X_2 + X_3$ *ist.*

Beweis. Mit Rücksicht auf Satz 1 genügt es zu zeigen, daß die in Satz 2 angegebene Bedingung (i) für die Endlichkeit der Menge N hinreichend ist.

Zu diesem Zweck nehmen wir an, die Menge N sei unendlich. Nach einem bekannten Satz (der mit Hilfe des Auswahlsaxioms bewiesen wird) [6]) gibt es dann ein Mengensystem $\boldsymbol{S}$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) *ist* $X \epsilon \boldsymbol{S}$ *und* $Y \epsilon \boldsymbol{S}$, *so ist auch* $X+Y \epsilon \boldsymbol{S}$;

(2) *ist* $X \epsilon \boldsymbol{S}$ *und* $Y \subset X$, *so ist auch* $Y \epsilon \boldsymbol{S}$;

(3) *ist* $x \epsilon N$, *so ist* $\{x\} \epsilon \boldsymbol{S}$;

(4) *ist* $X \subset N$, *so ist* $X \epsilon \boldsymbol{S}$ *oder* $N-X \epsilon \boldsymbol{S}$.

(5) N *non* ϵ $\boldsymbol{S}$.

Es seien nun X und Y zwei beliebige Teilmengen von N, die zu $\boldsymbol{S}$ nicht gehören. Es ist dann nach (4) $N-X \epsilon \boldsymbol{S}$, $N-Y \epsilon \boldsymbol{S}$ und ferner nach (1) $(N-X)+(N-Y) \epsilon \boldsymbol{S}$; nach (5) ergibt sich hieraus, daß $N \neq (N-X)+(N-Y)=N-X \cdot Y$ und folglich $X \cdot Y \neq 0$. Es gibt also keine zwei fremde Teilmengen von N, die zu $\boldsymbol{S}$ nicht gehören. Auf Grund von (3) ist ferner $N \subset \sum'_{X \epsilon \boldsymbol{S}} X$. Sind schließlich X_1, X_2 und X_3 drei beliebige Mengen des Systems $\boldsymbol{S}$, so folgt aus (1), daß $X_1+X_2+X_3 \epsilon \boldsymbol{S}$, und hieraus nach (2) und (5): N *non* $\subset X_1+X_2+X_3$.

Dadurch ist Folgendes gezeigt: ist die Menge N unendlich, so ist die Bedingung (i) nicht erfüllt. Wenn also, umgekehrt, (i) gilt, so muß N endlich sein, w. z. b. w.

Bemerkung 2. Im Gegensatz zu den Überdeckungssätzen für unendliche Mengen wird im Beweise des Überdeckungssatzes für endliche Mengen das Auswahlaxiom nicht verwendet [7]). Dagegen scheint die Rolle des Auswahlaxioms bei der Umkehrung dieses Satzes, d. i. im Beweise des Satzes 2, wesentlich zu sein.

Das ist aus folgender Überlegung zu ersehen. Dem Satz 2 zufolge gibt es für jede unendliche Menge N ein System $\boldsymbol{S}$, derart daß $\boldsymbol{Pt}(X)-\boldsymbol{S}$ keine zwei fremde Mengen als Elemente enthält und daß N wohl in der Summe aller Mengen von $\boldsymbol{S}$ enthalten ist, dagegen in keiner Summe von dreien oder sogar (mit Rücksicht auf Korollar 2) endlich vielen solcher Mengen. Bezeichnet man nun

[6]) Vgl. meinen Aufsatz *Une contribution à la théorie de la mesure*, Fund. Math. **15** (1930), S. 42 ff., insbesondere S. 49.

[7]) Alle Bemerkungen, die in diesem Aufsatz enthalten sind und Grundlagenfragen betreffen, können auf das Zermelosche Axiomensystem bezogen werden; vgl. E. Zermelo, *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I*, Math. Ann. **65** (1908), S. 261 ff.

mit $\boldsymbol{S}'$ das System aller Mengen $X \subset N$, die in einer Summe von endlich vielen Mengen $Y \epsilon \boldsymbol{S}$ enthalten sind, so gewinnt man ein System $\subset \boldsymbol{Pt}(N)$, das den im Beweis des Satzes 2 angegebenen Bedingungen (1)-(5) (für $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}'$) genügt. Mit Hilfe dieses Systems $\boldsymbol{S}'$ kann man sofort eine endlich-additive Maßfunktion in der Menge N bestimmen, die dabei nur zwei Werte annimmt [6]). Wie es aber neulich gezeigt wurde [8]), aus der Existenz einer derartigen Maßfunktion ergibt sich ohne Auswahlaxiom die Existenz einer Menge von reellen Zahlen, die im Lebesgueschen Sinne nicht meßbar ist. Und das Problem, die Existenz einer solchen Menge ohne Hilfe des Auswahlaxioms zu beweisen, wird ja heute als sehr schwierig, wenn nicht als hoffnungslos angesehen.

§ 2. Satz 2 könnte offenbar als eine Definition der endlichen Mengen angenommen werden. Aus den oben gemachten Bemerkungen ersieht man aber, daß — aller Wahrscheinlichkeit nach — die Äquivalenz dieser Definition mit der üblichen Definition der Endlichkeit [4]) nur auf Grund des Auswahlaxioms festgestellt werden kann, denn der Satz, der die Äquivalenz der beiden Definitionen zum Ausdruck bringt, impliziert die Existenz nicht meßbarer Mengen von reellen Zahlen.

In diesem Zusammenhang wollen wir noch auf zwei Definitionen der endlichen Mengen, aufmerksam machen, die in Termen der Theorie der Ideale formuliert sind. Ein Mengensystem $\boldsymbol{S}$ wird bekanntlich als ein Ideal, bzw. als ein Primideal, in der Menge N (genauer: in dem Mengenkörper $\boldsymbol{Pt}(N)$) bezeichnet, wenn es die im Beweis des Satzes 2 angegebenen Bedingungen (1) und (2), bzw. (1), (2), (4) und (5), erfüllt; es wird Hauptideal in N genannt, wenn es eine Menge $M \subset N$ gibt, so daß $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{Pt}(M)$ [9]). Die erwähnten Definitionen lauten folgendermaßen:

A. *Eine Menge N ist dann und nur dann endlich, wenn jedes Ideal in N ein Hauptideal ist.*

B. *Eine Menge N ist dann und nur dann endlich, wenn jedes Primideal in N ein Hauptideal ist* [10]).

[8]) Vgl. W. Sierpiński, *Fonctions additives non complètement additives et fonctions non mesurables*, dieser Band, S. 96-99.

[9]) Vgl. hiezu z. B. M. H. Stone, *The theory of representations for Boolean algebras*, Trans. Am. Math. Soc. **40** (1936), S. 37 ff., insbesondere S. 58 (Theorem 16), S. 63 (Definition 8) und S. 75 (Theorem 34). Vgl. auch meine Mitteilung *Ideale in den Mengenkörpern*, Ann. Soc. Pol. Math. **30** (1937), S. 186 ff.

[10]) Vgl. hiezu meinen in Anm. [6]) zitierten Aufsatz, S. 49, sowie meine Mitteilung *Grundzüge des Systemenkalküls. II*, Fund. Math. **26** (1936), S. 285 (Satz 37), wobei zur Terminologie die Arbeit von A. Mostowski, *Abzählbare Boolesche Körper und ihre Anwendung auf die allgemeine Metamathematik*, Fund. Math. **29** (1937), S. 34 ff., insbesondere S. 39 (Satz 2), zu berücksichtigen ist; ferner M. H. Stone, *Algebraic characterisations of special Boolean rings*, ibid., S. 223 ff., insbesondere S. 269 (Theorem 5.2).

Es zeigt sich nun, daß vom logischen Standpunkt aus die Definitionen A und B gar nicht so nahe verwandt sind, als man es auf den ersten Blick vermuten könnte. Man kann nämlich leicht nachweisen, ohne dabei vom Auswahlaxiom Gebrauch zu machen, daß Definition A der üblichen Definition der Endlichkeit und Definition B dem oben aufgestellten Satz 2 äquivalent ist; durch den Satz, der die Äquivalenz von A und B feststellt, wird also wiederum die Existenz nicht meßbarer Mengen von reellen Zahlen impliziert.

A. Fraenkel hat das Problem gestellt, derartige Definitionen der Endlichkeit anzugeben, daß die Behauptung ihrer Äquivalenz dem Auswahlaxiom äquivalent sei [11]). Dieses Problem kann sehr leicht und auf verschiedene Weisen gelöst werden. Betrachten wir z. B. folgende drei Definitionen der Endlichkeit:

C. Eine Menge N ist dann und nur dann endlich, wenn sie folgender Bedingung genügt: wird N durch eine Relation R wohlgeordnet, so wird sie auch durch die zu R konverse Relation wohlgeordnet.

D. Eine Menge N ist dann und nur dann endlich, wenn sie entweder aus höchstens einem Element besteht oder in zwei Teilmengen zerlegt werden kann, die von einer kleineren Mächtigkeit als N sind.

E. Eine Menge N ist dann und nur dann endlich, wenn sie entweder aus höchstens einem Element besteht oder von einer kleineren Mächtigkeit ist als das System aller geordneten (bzw. aller nicht geordneten) Paare, die aus Elementen der Menge N gebildet sind.

Man kann nun ohne Schwierigkeit zeigen, daß der Satz, der die Äquivalenz von C, D oder E mit der üblichen Definition der Endlichkeit behauptet, dem Auswahlaxiom äquivalent ist. Dies kommt auf die bekannte Tatsache hinaus, daß das Auswahlaxiom jedem der folgenden drei Sätze äquivalent ist:

C'. Jede Menge kann wohlgeordnet werden.

D'. Ist $\mathfrak{n}$ *eine unendliche Kardinalzahl und ist* $\mathfrak{n}=\mathfrak{p}+\mathfrak{q}$, *so ist* $\mathfrak{n}=\mathfrak{p}$ *oder* $\mathfrak{n}=\mathfrak{q}$.

E'. Ist $\mathfrak{n}$ *eine unendliche Kardinalzahl, so ist* $\mathfrak{n}=\mathfrak{n}^2$. [12])

Zum Schluß sei bemerkt, daß ebenso leicht manche andere Grundlagenfragen der Mengenlehre in die Form von Fragen über die Äquivalenz zweier geeigneter Definitionen der Endlichkeit gekleidet werden können. Das betrifft insbesondere die sog. Cantorsche Alefhypothese:

$2^{\aleph_\alpha}=\aleph_{\alpha+1}$ *für jede Ordnungszahl* α.

Das logische Produkt dieser Hypothese und des Auswahlaxioms ist bekanntlich folgendem Satz äquivalent:

F'. Ist $\mathfrak{n}$ *eine unendliche Kardinalzahl, so gibt es keine Zahl* $\mathfrak{p}$, *die* $>\mathfrak{n}$ *und* $<2^{\mathfrak{n}}$ *ist* [13]).

---

[11]) Vgl. A. Fraenkel, *Zehn Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre*, Wiss. und Hyp. **31**, Leipzig und Berlin 1927, S. 147.

[12]) Vgl. W. Sierpiński, *Zarys teorii mnogości* (*Grundriß der Mengenlehre*, polnisch), 1. Teil, 3. Aufl., Warszawa 1928, S. 249 f. und 255 ff., sowie meinen Aufsatz: *Sur quelques théorèmes qui équivalent à l'axiome du choix*, Fund. Math. **5** (1924), S. 147 ff., insbesondere S. 151 (Théorème 2).

[13]) Vgl. A. Lindenbaum et A. Tarski, *Communication sur les recherches de la théorie des ensembles*, C. R. Soc. Sc. Vars. **19** (1926), Cl. III, S. 299 ff., insbesondere S. 314 (Satz 95).

Wir formulieren nun den Satz:

F. Eine Menge N ist dann und nur dann endlich, wenn entweder N aus höchstens einem Elemente besteht, oder es eine Menge gibt, die von einer größeren Mächtigkeit als N und von einer kleineren Mächtigkeit als das System aller Teilmengen von N ist.

Satz F hat wiederum die Gestalt einer Definition der Endlichkeit; die Behauptung der Äquivalenz dieses Satzes mit der üblichen Definition ist aber offenkündig dem Satz F' und folglich dem logischen Produkt des Auswahlaxioms und der Cantorschen Alefhypothese äquivalent.