Errata

au travail

Sur les fonctions absolument continues d'intervalle

(Fundamenta Mathematicae XXVII)

par

S. Kempisty (Wilno).

Page 12, ligne 11, en descendent, *au lieu de*: norme *lire*: mesure.
Page 15, ligne 17, en descendant, *ajouter*: dès que $\underline{D}_x F$ et $\overline{D}_x F$ sont sommables.
Page 15, ligne 5, en remontant, *au lieu de*

$$(E)\int_R F \leqslant \int_R l(x)\,dx \leqslant \int_R u(x)\,dx \leqslant (E)\int_R F$$

lire:

$$(E)\int_{\overline{R}} F \leqslant \int_R l(x)\,dx, \qquad \int_R u(x)\,dx \leqslant (E)\overline{\int_R} F.$$

Page 19, ligne 7, en descendant, *ajouter*: E étant couvert par S.
Page 20, ligne 4, en remontant, *au lieu de*: $p(E)$ *lire*: $p(D)$.
Page 27, ligne 10, en descendant, *supprimer*: $I'r$.
„ lignes 1-6, en remontant, *supprimer* lignes 1-6.
Page 29, lignes: 4, 6, en descendant, *supprimer*: régulièrement intégrable.
Page 29, ligne 5, en descendant, *au lieu de*: ACr *lire*: VBr.
Page 31, ligne 11, en remontant, *au lieu de*: nulle *lire*: finie.

Sur une propriété des espaces métriques séparables.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

M. C. Kuratowski a posé récemment le problème suivant:

E étant un espace métrique séparable, existe-t-il toujours une famille dénombrable ou finie Φ de sous-ensembles de E à la fois fermés et ouverts, telle que tout sous-ensemble de E à la fois fermé et ouvert soit une somme d'ensembles de la famille Φ.

Le problème de M. Kuratowski n'est pas encore résolu. Or, je donnerai ici la solution positive du problème *affaibli* qu'on obtient en remplaçant dans le problème de M. Kuratowski le mot *somme* par le mot *limite*. Je vais démontrer notamment ce

Théorème. *E étant un espace métrique séparable, il existe une famille dénombrable ou finie Φ de sous-ensembles de E, à la fois fermés et ouverts, telle que tout sous-ensemble H de E qui est à la fois fermé et ouvert est de la forme*

$$H = \lim_{n=\infty} E_n = (E_1+E_2+E_3+\dots)(E_2+E_3+\dots)(E_3+\dots)\dots =$$
$$= E_1E_2E_3\dots + E_2E_3E_4\dots + E_3E_4\dots + \dots,$$

où $E_n \epsilon \Phi$ pour $n=1,2,3,\dots$

Démonstration. Soit E un espace métrique séparable donné. Il existe donc une suite infinie de sous-ensembles ouverts de E

(1) $$U_1, U_2, U_3, \dots$$

telle que tout sous-ensemble ouvert de E est une somme de certains ensembles de la suite (1).

Soit F la famille de tous les sous-ensembles de E qui sont à la fois fermés et ouverts. Soit

$$\sigma=\begin{pmatrix} m_1, m_2, \ldots, m_k \\ n_1, n_2, \ldots, n_l \end{pmatrix} \tag{2}$$

un système formé de deux suites finies quelconques de nombres naturels. L'ensemble S de tous les systèmes σ est, comme on sait, dénombrable.

Nous ferons correspondre au système (2) un sous-ensemble de E, à la fois fermé et ouvert, comme il suit.

S'il existe au moins un ensemble H de la famille F, tel que:

$$U_{m_1}+U_{m_2}+\ldots+U_{m_k}\subset H \qquad \text{et} \qquad H(U_{n_1}+U_{n_2}+\ldots+U_{n_l})=0,$$

un quelconque de tels ensembles H correspondra au système σ et nous désignerons cet ensemble par H_σ. Dans le cas contraire, nous poserons $H_\sigma=E$.

Soit Φ la famille de tous les ensembles H_σ où $\sigma\epsilon S$. Je dis que la famille Φ satisfait à la thèse du théorème.

L'ensemble S étant dénombrable, la famille Φ est évidemment au plus dénombrable.

Soit maintenant H un ensemble quelconque de la famille F. Les ensembles H et $E-H$ sont donc ouverts et, d'après la propriété de la suite (1), il existe deux suites infinies de nombres naturels, $m_1, m_2, m_3, \ldots$ et $n_1, n_2, n_3, \ldots$, telles que:

$$H=U_{m_1}+U_{m_2}+U_{m_3}+\ldots \qquad \text{et} \qquad E-H=U_{n_1}+U_{n_2}+U_{n_3}+\ldots \tag{3}$$

Posons

$$\sigma_i=\begin{pmatrix} m_1, m_2, \ldots, m_i \\ n_1, n_2, \ldots, n_i \end{pmatrix} \qquad \text{pour} \quad i=1,2,3,\ldots \tag{4}$$

On a $H_{\sigma_i}\epsilon\Phi$ pour $i=1,2,3,\ldots$ Je dis que

$$H=\lim_{i=\infty} H_{\sigma_i}. \tag{5}$$

En effet, il résulte de (3) qu'on a pour $i=1,2,\ldots$:

$$U_{m_1}+U_{m_2}+\ldots+U_{m_i}\subset H \qquad \text{et} \qquad H(U_{n_1}+U_{n_2}+\ldots+U_{n_i})=0.$$

H étant un ensemble à la fois fermé et ouvert, on a donc selon la définition de l'ensemble H_{σ_i}:

$$U_{m_1}+U_{m_2}+\ldots+U_{m_i}\subset H_{\sigma_i} \qquad \text{et} \qquad H_{\sigma_i}(U_{n_1}+U_{n_2}+\ldots+U_{n_i})=0. \tag{6}$$

Soit maintenant p un point quelconque de H. D'après (3), il existe un indice r tel que $p\,\epsilon\, U_{m_r}$, d'où selon (6) $p\epsilon H_{\sigma_i}$ pour $i\geqslant r$, ce qui donne $p\,\epsilon \underline{\lim}_{i=\infty} H_{\sigma_i}$. On trouve ainsi

$$H\subset \underline{\lim}_{i=\infty} H_{\sigma_i}. \tag{7}$$

D'autre part, soit p un point quelconque de $E-H$. D'après (3), il existe un indice s tel que $p\,\epsilon\, U_{n_s}$, d'où selon (6) p non $\epsilon\, H_{\sigma_i}$ pour $i\geqslant s$, donc p non $\epsilon\, \overline{\lim}_{i=\infty} H_{\sigma_i}$. On trouve ainsi $(E-H)\cdot\overline{\lim}_{i=\infty} H_{\sigma_i}=0$, ce qui donne tout de suite

$$\overline{\lim}_{i=\infty} H_{\sigma_i}\subset H. \tag{8}$$

Les formules (8) et (7) entraînent la formule (5), qui est ainsi établie. Par conséquent, la famille Φ satisfait à la thèse du théorème, qui se trouve donc démontré.