Quelques théorèmes sur le plongement topologique des espaces[1]).

Par

Casimir Kuratowski (Warszawa).

Dans le vol. 28 de ce Journal (p. 338) j'ai démontré le *„théorème auxiliaire"* suivant: *A et B étant deux ensembles fermés et disjoints, situés dans un espace métrique séparable $\mathfrak{X}$ de dimension $\leqslant n$, les éléments g de l'espace $(\mathcal{J}^{2n+1})^{\mathfrak{X}}$ tels que $\overline{g(A)}\cdot\overline{g(B)}=0$ constituent dans cet espace un ensemble ouvert et dense*[2]).

Je vais en déduire à présent le théorème que voici:

Théorème 1. *A et B étant deux sous-ensembles fermés d'un espace métrique séparable $\mathfrak{X}$ de dimension $\leqslant n$ tels que le produit AB est compact, les éléments g de l'espace $(\mathcal{J}^{2n+1})^{\mathfrak{X}}$ satisfaisant à la condition*

$$\overline{g(A)}\cdot\overline{g(B)}=g(AB) \tag{1}$$

constituent dans cet espace un ensemble résiduel[3]).

Ensuite, je vais donner, en m'appuyant sur le th. 1, une démonstration du théorème de M. Nöbeling sur le plongement des espaces réguliers dans les espaces réguliers compacts[4]) (d'ailleurs, en le généralisant légèrement).

---

[1]) Présenté à la Soc. Polon. de Math., Section de Varsovie, le 5. X. 1937.

[2]) $\mathcal{J}^n=$ cube à n dimensions. $\mathcal{Y}^{\mathfrak{X}}=$ espace des transformations continues de $\mathfrak{X}$ en sous-ensembles de $\mathcal{Y}$, métrisé par la formule $|f_1-f_2|=\sup|f_1(x)-f_2(x)|$.

[3]) Un ensemble est dit résiduel lorsque son complémentaire est de première catégorie (c. à d. somme d'une série d'ensembles non denses). L'espace $(\mathcal{J}^{2n+1})^{\mathfrak{X}}$ étant complet, tout sous-ensemble résiduel y est dense.

[4]) Math. Ann. 104 (1931), p. 81.

1. *Démonstration du th. 1.* Soit S_k la sphère ouverte de centre AB et de rayon $1/k$ (c. à d. l'ensemble des points dont la distance de AB est $<1/k$). Posons:

$$A_k=A-S_k, \quad \text{d'où} \quad A_k\cdot B=0 \quad \text{et} \quad A-B=A_1+A_2+\dots$$

En appliquant le théorème auxiliaire au couple d'ensembles A_k et B, on en conclut que l'ensemble $\Phi_k=\underset{g}{E}[\overline{g(A_k)}\cdot\overline{g(B)}=0]$ est dense et ouvert, donc que l'ensemble $\Phi=\Phi_1\cdot\Phi_2\cdot\dots$ est résiduel (comme un G_δ dense).

Soit $g\in\Phi$. La démonstration du th. 1 se réduit à établir la formule (1). Or:

$$\overline{g(A)}=\sum_k\overline{g(A_k)}+\overline{g(A)}-\sum_k\overline{g(A_k)}=$$

$$=\sum_k\overline{g(A_k)}+\prod_k[\overline{g(A)}-\overline{g(A_k)}]\subset\sum_k\overline{g(A_k)}+\prod_k\overline{g(A-A_k)}\subset\sum_k\overline{g(A_k)}+\prod_k\overline{g(S_k)}.$$

Comme[1]) $\prod_k\overline{g(S_k)}=g(\prod_k S_k)=g(AB)$, il vient

$$\overline{g(A)}\cdot\overline{g(B)}\subset\sum_k\overline{g(A_k)}\cdot\overline{g(B)}+g(AB),$$

d'où la formule (1), puisque l'hypothèse $g\in\Phi$ implique que $\sum_k\overline{g(A_k)}\cdot\overline{g(B)}=0$.

Remarque. *L'ensemble des fonctions g satisfaisant à* (1) *est un G_δ.* En effet, la condition nécessaire et suffisante pour que g ne satisfasse pas à (1) s'exprime en symboles logiques de la façon suivante

$$\sum_y\{[y\in\overline{g(A)}][y\in\overline{g(B)}][y\,non\text{-}\epsilon\,g(\overline{AB})]\}.$$

L'opérateur $F(g)=\overline{g(A)}$, où g est considérée comme une variable parcourant l'espace $(\mathcal{J}^{2n+1})^{\mathfrak{X}}$, est continu et par conséquent l'ensemble des fonctions g satisfaisant à la condition entre crochets $\{\ \}$ est un F_σ (partie commune de deux ensembles fermés et d'un ensemble ouvert). Sa projection l'est donc également.

---

[1]) D'une façon générale, *si Z est un sous-ensemble compact d'un espace $\mathfrak{X}$ et S_k une sphère de centre Z et de rayon $1/k$, on a, pour chaque fonction continue g définie sur $\mathfrak{X}$, l'identité* $\prod_k\overline{g(S_k)}=g(\prod_k S_k)=g(Z)$.

En effet, y appartenant à chaque $\overline{g(S_k)}$, il existe deux suites de points $\{x_k\}$ et $\{z_k\}$ tels que $x_k\in S_k$, $z_k\in Z$, $|y-g(x_k)|<1/k$ et $|z_k-x_k|<1/k$. L'ensemble Z étant compact, il est légitime d'admettre que la suite $\{z_k\}$ est convergente. Soit $\lim z_k=z$, d'où $\lim x_k=z$, donc $\lim g(x_k)=g(z)$ et comme $\lim g(x_k)=y$, il vient $y\in g(Z)$.

2. *Application aux espaces réguliers.* Soit $\mathfrak{X}$ un espace (métrique séparable) régulier, c. à d. dont chaque point admet des entourages aussi petits que l'on veut avec frontière finie. Chaque espace régulier étant de dimension $\leqslant 1$, envisageons l'espace fonctionnel $(\mathcal{J}^3)^{\mathfrak{X}}$. Il est d'abord à remarquer que l'ensemble des homéomorphies g telles que $\overline{g(\mathfrak{X})}$ est régulier n'est pas nécessairement résiduel. Ainsi, par exemple, si $\mathfrak{X}=\underset{x}{E}(0<x\leqslant 1)$ et si h est une homéomorphie qui transforme $\mathfrak{X}$ en la courbe $y=\sin 1/x$, $0<x\leqslant 1$, il n'existe aucune homéomorphie g, suffisamment voisine de h, telle que l'ensemble $\overline{g(\mathfrak{X})}$ soit régulier.

Convenons de dire, pour abréger, qu'un ensemble V situé dans un espace compact est en *position normale*, lorsqu'il existe une transformation continue f de $\bar{V}$ en un ensemble régulier et qui est une homéomorphie sur V.

La courbe $y=\sin 1/x$, $0<x\leqslant 1$ est en position normale, puisque la projection sur l'axe des x transforme sa fermeture en l'intervalle $0\leqslant x\leqslant 1$, le continu de condensation $-1\leqslant y\leqslant 1$, $x=0$, se transformant en l'origine des axes.

Théorème 2. *$\mathfrak{X}$ étant un espace métrique, séparable et régulier, les éléments g de l'espace $(\mathcal{J}^3)^{\mathfrak{X}}$ qui sont des homéomorphies telles que $g(\mathfrak{X})$ est en position normale constituent un ensemble résiduel.*

Démonstration. L'espace $\mathfrak{X}$ contient par hypothèse une base composée d'ensembles ouverts $R_1, R_2, \ldots$ [1]) telle que l'ensemble $\bar{R}_i - R_i$ est fini, quel que soit $i=1,2,\ldots$ Pour i fixe, appliquons le th. 1, en posant $\bar{R}_i=A$ et $\mathfrak{X}-R_i=B$, et rapprochons-le du théorème d'après lequel les homéomorphies constituent dans l'espace $(\mathcal{J}^3)^{\mathfrak{X}}$ un ensemble résiduel [2]). On en conclut que les homéomorphies g telles que

$$\overline{g(R_i)}\cdot\overline{g(\mathfrak{X}-R_i)}=g(\bar{R}_i-R_i) \tag{2}$$

forment un ensemble résiduel.

Soit g une homéomorphie de ce genre. Posons:

$$V=g(\mathfrak{X}),\qquad \mathcal{Y}=\bar{V}\qquad \text{et}\qquad G_i=g(R_i). \tag{3}$$

[1]) c. à d. qu'à chaque x et à chaque $\varepsilon>0$ correspond un R_i tel que $x\in R_i$ et $\delta(R_i)<\varepsilon$.

[2]) Th. 1 de ma note citée des Fund. Math. 28, p. 336. Cf. aussi le N° 3 de la note présente.

On constate d'abord que, g étant une homéomorphie, G_i est ouvert dans V et

(i) *$\{G_i\}$ forme une base relativement à V.*

En outre, en désignant par $Fr(Y)$ la frontière $\bar{Y}\cdot\overline{\mathcal{Y}-Y}$ de Y (dans l'espace $\mathcal{Y}$), on a:

$$Fr(\bar{G}_i)\subset V, \tag{ii}$$

(iii) *$Fr(\bar{G}_i)$ est un ensemble fini.*

On a, en effet,

$$Fr(\bar{G}_i)=\bar{G}_i\cdot\overline{\bar{V}-\bar{G}_i}\subset\bar{G}_i\cdot\overline{V-G_i}=\overline{g(R_i)}\cdot\overline{g(\mathfrak{X})-g(R_i)}\subset\overline{g(\bar{R}_i)}\cdot\overline{g(\mathfrak{X}-R_i)}=g(\bar{R}_i-R_i)$$

selon (2).

Le th. 2 sera donc démontré (et, partant, le théorème de M. Nöbeling, qui en est une conséquence) dès que le lemme suivant sera établi:

Lemme. *V étant un ensemble régulier dense dans l'espace compact $\mathcal{Y}$ et $G_1, G_2, \ldots$ étant une suite d'ensembles ouverts dans V et assujettis aux conditions* (i)-(iii), *l'ensemble V est en position normale dans l'espace $\mathcal{Y}$.*

Plus précisément: la décomposition de l'espace $\mathcal{Y}$ en points individuels de l'ensemble V et en composantes [1]) *de l'ensemble $\mathcal{Y}-V$ est semi-continue et l'hyper-espace de cette décomposition est régulier* [2]).

Démonstration. Remarquons d'abord que

$$G_i\cdot Fr(\bar{G}_i)=0. \tag{4}$$

En effet, $G_i\cdot Fr(\bar{G}_i)=G_i\cdot\bar{G}_i\cdot\overline{\bar{V}-\bar{G}_i}\subset G_i\cdot\overline{V-G_i}=G_i\cdot V\cdot\overline{V-G_i}=0$, car, G_i étant ouvert dans V, on a $V\cdot\overline{V-G_i}=V-G_i$.

[1]) S est une *composante* de E lorsque S est un sous-ensemble connexe de E et n'est contenu dans aucun autre sous-ensemble connexe de E.

[2]) Une décomposition d'un espace compact $\mathcal{Y}$ en ensembles disjoints (dits *tranches* de la décomposition) est dite *semi-continue* lorsqu'à chaque suite convergente de tranches correspond une tranche qui contient la limite de cette suite. Il existe alors un espace compact $\mathfrak{S}$, dit *hyper-espace* de la décomposition, et une transformation continue de $\mathcal{Y}$ en $\mathfrak{S}$, telle que les tranches en question coïncident avec les ensembles $f^{-1}(z)$ où z parcourt $\mathfrak{S}$ (cf. ma note de Fund. Math. 11, 1928, p. 169 et 173).

S étant un sous-ensemble connexe de $\mathcal{Y}-V$,

(5) *l'inégalité* $S\cdot\overline{G}_i\neq 0$ *entraîne* $S\subset\overline{G}_i$,

car on aurait autrement $S\cdot Fr(\overline{G}_i)\neq 0$, contrairement à (ii).

Ceci établi, passons à la démonstration de la semi-continuité de la décomposition considérée. Il s'agit de montrer que, $S_1, S_2, \dots$ étant une suite convergente de composantes de l'ensemble $\mathcal{Y}-V$, si le diamètre $\delta(L)$ de la limite L de cette suite est positif, il existe une composante S de $\mathcal{Y}-V$ telle que $L\subset S$. Cela revient à démontrer que $L\subset\mathcal{Y}-V$, car L étant un continu (en tant que limite d'une suite d'ensembles connexes), l'inclusion $L\subset\mathcal{Y}-V$ implique que L est sous-ensemble d'une composante de $\mathcal{Y}-V$.

Or, supposons par impossible qu'il existe un $y\,\epsilon\, LV$. En vertu de (i), il existe un G_i tel que $y\,\epsilon\, G_i$ et $\delta(G_i)<\frac{1}{2}\delta(L)$. D'après (4), y est un point intérieur de $\overline{G}_i$. L'égalité $L=\operatorname{Lim} S_n$ implique donc, pour n suffisamment grand, que $S_n\cdot\overline{G}_i\neq 0$, d'où, selon (5), $S_n\subset\overline{G}_i$, donc $\delta(S_n)\leqslant\delta(\overline{G}_i)<\frac{1}{2}\delta(L)$. On est conduit ainsi à une contradiction, car la même égalité $L=\operatorname{Lim} S_n$ implique que $\delta(S_n)>\frac{1}{2}\delta(L)$ pour n suffisamment grand.

La semi-continuité de la décomposition considérée étant établie, soit $z=f(y)$ une fonction continue telle que les ensembles $f^{-1}(z)$ coïncident avec les tranches de cette décomposition. Il s'agit de prouver que l'ensemble $\mathfrak{S}=f(\mathcal{Y})$, c. à d. l'hyper-espace de cette décomposition, est régulier.

Soit d'abord z un point de $\mathfrak{S}$ de la forme $z=f(y)$ où $y\,\epsilon\, V$. Soit $\varepsilon>0$. D'après (i), il existe un G_i tel que $y\,\epsilon\, G_i$ et $\delta[f(\overline{G}_i)]<\varepsilon$. L'ensemble $\overline{G}_i$ étant selon (5) une somme de tranches et l'ensemble $Fr(\overline{G}_i)$ jouissant également de cette propriété (comme sous-ensemble de V; cf. (ii)), il vient[1] $Fr[f(\overline{G}_i)]\subset f[Fr(\overline{G}_i)]$. La fonction f étant

[1] C'est une conséquence de l'énoncé suivant: *U et W étant deux sous-ensembles fermés de $f(\mathcal{Y})$ et $\mathcal{Y}$ étant un espace compact, l'égalité $Fr[f^{-1}(U)]=f^{-1}(W)$ entraîne $Fr(U)\subset W$.*

Pour établir cet énoncé, remarquons d'abord que, si $f^{-1}(M)$ est fermé, l'ensemble $M=ff^{-1}(M)$ l'est également. Par conséquent, si $f^{-1}(N)$ est ouvert, N l'est également. Or, l'ensemble $f^{-1}(U-W)$, comme égal à

$$f^{-1}(U)-f^{-1}(W)=f^{-1}(U)-Fr[f^{-1}(U)],$$

est ouvert; donc $U-W$ est un sous-ensemble ouvert de U, d'où

$$(U-W)Fr(U)=0$$

et par conséquent $Fr(U)\subset W$.

une homéomorphie sur V, donc sur $Fr(\overline{G}_i)$, l'ensemble $Fr[f(\overline{G}_i)]$ est de puissance au plus égale à celle de $Fr(\overline{G}_i)$ et celle-ci est finie (selon (iii)). En outre, z *non*-$\epsilon\, Fr[f(\overline{G}_i)]$, car en vertu de (4) y *non*-$\epsilon\, Fr(\overline{G}_i)$. De sorte que $f(\overline{G}_i)$ est un entourage de z (dans $\mathfrak{S}$) ayant la frontière finie.

Il est ainsi établi que $\mathfrak{S}$ est régulier en chaque point de $f(V)$[1]. Nous en concluons que $\mathfrak{S}$ est régulier en chacun de ses points. En effet, il existerait en cas contraire un continu C contenant plus d'un point et composé exclusivement de points irréguliers de $\mathfrak{S}$[2]. On aurait donc $C\subset\mathfrak{S}-f(V)$, d'où $f^{-1}(C)\subset\mathcal{Y}-V$. Or, la formule $f^{-1}(C)=\sum_{z\epsilon C}f^{-1}(z)$ représente une décomposition de l'ensemble compact $f^{-1}(C)$ en composantes. C étant l'hyper-espace de cette décomposition, cela contredit le théorème d'après lequel l'hyper-espace d'une décomposition d'un espace compact en composantes est de dimension 0[3].

3. *Généralisation du théorème du plongement de Menger-Nöbeling.* Comme l'a suggéré M. Mazurkiewicz, la méthode dont je me sers dans la note présente permet de préciser ce théorème de la façon suivante:

Si $\dim\mathfrak{X}\leqslant n$, les homéomorphies g telles que $\dim\overline{g(\mathfrak{X})}\leqslant n$ et que, pour tout $x\,\epsilon\,\mathfrak{X}$, la dimension de $\mathfrak{X}$ au point x est égale à celle de $\overline{g(\mathfrak{X})}$ au point $g(x)$, constituent un ensemble résiduel dans l'espace $(\mathcal{J}^{2n+1})^{\mathfrak{X}}$ [4].

Soit, en effet, $R_1, R_2, \dots$ une suite d'ensembles ouverts tels qu'à chaque x et à chaque $\varepsilon>0$ correspond un R_i pour lequel on a $x\,\epsilon\, R_i$, $\delta(R_i)<\varepsilon$ et $\dim Fr(R_i)\leqslant\dim_x\mathfrak{X}-1$[5].

D'après le th. 2 de Fund. Math. 28, op. c. l'ensemble des homéomorphies g telles que $\dim[\overline{g(\overline{R}_i)}\cdot\overline{g(\mathfrak{X}-R_i)}]=\dim(\overline{R}_i-R_i)$ pour tout $i=1,2,\dots$, est résiduel.

En se servant des notations (3), on constate — comme dans la démonstration de (ii) — que $\dim Fr(\overline{G}_i)\leqslant\dim Fr(R_i)$, la frontière de $\overline{G}_i$ étant entendue relativement à l'espace $\mathcal{Y}=\overline{g(\mathfrak{X})}$.

Or, soit $y=g(x)$ un point donné de $\mathcal{Y}$ et $\eta>0$. Soit $x\,\epsilon\, R_i$, $\delta[g(R_i)]<\eta$ et $\dim Fr(R_i)\leqslant\dim_x\mathfrak{X}-1$. La formule (4) étant évidemment valable, $\overline{G}_i$ est un entourage de y, d'où $\dim_y\mathcal{Y}=\dim_x\mathfrak{X}$, c. q. f. d.

[1] Plus précisément: *l'ordre de $\mathfrak{S}$ au point $f(y)$ est égal à l'ordre de $\mathcal{Y}$ au point y.*

[2] Cf. K. Menger, *Kurventheorie*, p. 127.

[3] Cf. ma note citée de Fund. Math. 11, p. 181.

[4] La possibilité de compactifier un espace métrique séparable sans en augmenter la dimension aux points individuels (qui est une conséquence immédiate du théorème qui vient d'être établi) a été signalée par M. Hurewicz dans les Proc. Akad. Amsterdam XXX, p. 430.

[5] Cf. mon livre *Topologie I*, Monogr. Matem., p. 119.