Sur les fonctions absolument semi-continues.

Par

S. Kempisty (Wilno).

Dans mon travail antérieur „*Sur les fonctions absolument continues d'intervalle*" [1]), j'ai établi les propriétés principales des fonctions absolument continues généralisées et développé la théorie de la totalisation des fonctions de plusieurs variables.

Le travail présent contient quelques généralisations des résultats y énoncés ainsi qu'une solution du problème de l'équivalence des intégrales de Denjoy et de Perron pour les fonctions de plusieurs variables.

En renonçant à l'additivité des majorantes et des minorantes, je vais définir une opération intégrale embrassant l'intégrale (régulière) au sens de Perron et équivalente à l'intégration (régulière) au sens de Denjoy. En même temps la notion d'intégrale (régulière) au sens de Ridder sera étendue, en conservant l'équivalence de cette intégrale et de la totale (régulière).

Enfin, je vais étendre aux fonctions de plusieurs variables un théorème de M. J. Marcinkiewicz sur l'intégrale de Perron.

1. *Intégrales extrêmes d'une fonction d'intervalle.* Les notations et définitions seront celles du travail précité, qui sera désigné par A dans la suite. Les propriétés générales de l'intégrale régulière d'une fonction d'intervalle ont été énoncées dans A, § 1. Nous allons citer à présent quelques propriétés correspondantes des intégrales régulières extrêmes. Ces propriétés ont été établies par M. S. Saks [2]) et par M-lle R. C. Young [3]).

[1]) Fund. Math. **27** (1936), pp. 10-37.

[2]) S. Saks, *Sur les fonctions d'intervalle*, Fund. Math. **10** (1925), pp. 215, 213.

[3]) *Functions of Σ...*, Math. Zeitschr. **29** (1929), pp. 184, 190, 191, 192.

Th. 1. *L'intégrale régulière inférieure (supérieure) est une fonction non décroissante (non croissante) par division*, c'est à dire que $\underline{\int_R} F \leqslant \underline{\int_D} F$ et $\overline{\int_D} F \leqslant \overline{\int_R} F$, D étant une division de l'intervalle R.

Th. 2. *Une fonction d'intervalle étant non croissante (non décroissante) par division, son intégrale régulière inférieure (supérieure) est additive.*

Th. 3. *Si l'intégrale régulière inférieure (supérieure) d'une fonction d'intervalle non décroissante (non croissante) par division est additive, cette fonction est régulièrement intégrable.*

Th. 4. *L'intégrale régulière inférieure (supérieure) d'une fonction d'intervalle dans R étant finie, elle diffère de $-\infty$ ($\mp\infty$) dans tout sous-intervalle de R.*

Th. 5. *Si l'intégrale régulière inférieure (supérieure) de $F(I)$ est finie et additive dans R, il existe, pour tout $\varepsilon>0$, un $\delta_\varepsilon>0$ de manière qu'on ait $F(S)>\underline{\int_S} F-\varepsilon$ $\left((F(S)<\overline{\int_S} F+\varepsilon)\right)$ pour tout système élémentaire et régulier S de norme $<\delta_\varepsilon$, contenu dans R.*

Pour les intégrales extrêmes non additives, on peut établir une propriété analogue, suivant l'idée de M. Saks [4]).

Désignons par P^i l'hyperplan qu'on obtient en fixant une coordonnée x_i d'un point variable $x=(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_k)$.

Soit $F_{P^i}(I)$ une fonction auxiliaire, égale à $F(I)$ pour les intervalles I contenant des points de P^i et nulle pour tous les autres intervalles. Soit R un intervalle fondamental divisé en deux intervalles R_1 et R_2 par l'hyperplan P^i.

Posons ensuite, D étant une division régulière de R:

$$A(P^i)=\limsup_{n(D)\to 0}[F_{P^i}(D)-F_{P^i}(R_1D)-F_{P^i}(R_2D)],$$

$$a(P^i)=\liminf_{n(D)\to 0}[F_{P^i}(D)-F_{P^i}(R_1D)-F_{P^i}(R_2D)],$$

où R_1D et R_2D désignent les divisions des intervalles R_1 et R_2 par la division D, et $n(D)$ désigne la norme de D.

Appelons $A(P^i)$ *écart supérieur* et $a(P^i)$ *écart inférieur* de F en P^i. Comme l'intégrale supérieure (inférieure) est non croissante (non décroissante) par division, l'écart supérieur (inférieur) est non négatif (non positif). L'hyperplan pour lequel l'une des fonctions $A(P^i)$ et $a(P^i)$ est différente de 0 sera appelé *hyperplan d'écart*.

[4]) loc. cit. p. 213, th. 3.

Considérons un nombre fini d'hyperplans d'écart

$$P_1^i, P_2^i, \dots, P_{n_i}^i$$

contenant toutes les faces parallèles à l'hyperplan $x_i=0$ de tous les intervalles d'une division D de R. Il est aisé de voir que

$$\underline{\int}_D F + \sum_{j=1}^{n_i} A(P_j^i) \leqslant \overline{\int}_R F \leqslant \overline{\int}_D F + \sum_{j=1}^{n_i} A(P_j^i),$$

$$\underline{\int}_D F + \sum_{j=1}^{n_i} a(P_j^i) \leqslant \underline{\int}_R F \leqslant \overline{\int}_D F + \sum_{j=1}^{n_i} a(P_j^i).$$

Lorsque les intégrales régulières extrêmes de F sont finies dans R, on a:

$$0 \leqslant \sum_{j=1}^{n_i} A(P_j^i) \leqslant \overline{\int}_R F - \underline{\int}_R F, \qquad 0 \leqslant -\sum_{j=1}^{n_i} a(P_j^i) \leqslant \overline{\int}_R F - \underline{\int}_R F,$$

puisque l'intégrale inférieure (supérieure) est non décroissante (non croissante) par division [5]).

Comme il n'existe dans ce cas qu'un nombre fini d'hyperplans en lequels les écarts sont supérieurs en valeur absolue à un nombre positif, l'ensemble des hyperplans d'écart est dénombrable au plus. Soient $P_1, P_2, \dots, P_n, P_{n+1}, \dots$ ces hyperplans. Nous avons donc

$$0 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} A(P_n) < \infty, \qquad -\infty < \sum_{n=1}^{\infty} a(P_n) \leqslant 0,$$

et il existe pour tout $\varepsilon>0$ un nombre n_ε tel que

$$0 \leqslant \sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} A(P_n) < \varepsilon, \qquad -\varepsilon < \sum_{n=n\ +1}^{\infty} a(P_n) \leqslant 0.$$

Par suite, on a le

[5]) Ces inégalités ne subsistent pas quand les hyperplans d'écart ne sont pas parallèles. Pour le voir, il suffit de considérer dans $R=(-1,1;-1,1)$ la fonction $F(I)$ égale à 1 si le point $(0,0)$ est intérieur à I et nulle pour tous les autres intervalles I (exemple de M. A. J. Ward).

Th. 6. *Si les intégrales régulières extrêmes de $F(I)$ dans R sont finies, il existe pour tout $\varepsilon>0$ un δ_ε positif et un n_ε naturel, tels que $F(S) < \overline{\int}_S F + \varepsilon$, quel que soit le système régulier S dont la norme est $<\delta_\varepsilon$ et dont les intervalles n'ont pas de points frontières sur les hyperplans $P_1, P_2, \dots, P_{n_\varepsilon}$.*

Le th. 6 nous permet de généraliser un lemme de M. Saks [6]) comme il suit:

Th. 7. *Lorsque les intégrales régulières extrêmes d'une fonction d'intervalle sont finies dans R et que l'intégrale inférieure (supérieure) est non négative (non positive) sur tout intervalle contenu dans R, la dérivée régulière inférieure (supérieure) de cette fonction est presque partout non négative (non positive).*

Pour le démontrer on n'a qu'à reproduire le raisonnement de M. Saks.

En se servant des hyperplans d'écart et du lemme de Vitali, on peut établir la proposition suivante qui étend à l'espace à $n \geqslant 2$ dimensions les relations établies par M. Saks pour l'espace linéaire [7]).

Th. 8. *Les intégrales régulières extrêmes de F dans R étant finies, on a presque partout dans R*

$$\underline{D}_x \underline{\int}_I F \leqslant \underline{D}_x F \leqslant \begin{matrix} \underline{D}_x \overline{\int}_I F \\ \overline{D}_x \underline{\int}_I F \end{matrix} \leqslant \overline{D}_x F \leqslant \overline{D}_x \overline{\int}_I F.$$

Pour les fonctions monotones par division, on obtient les égalités. En effet, on a le

Th. 9 [8]). *Si F est une fonction non décroissante (non croissante) par division et ses intégrales régulières extrêmes sont finies, on a presque partout dans R les égalités:*

$$\underline{D}_x \underline{\int}_I F = \underline{D}_x F = \underline{D}_x \overline{\int}_I F, \qquad \overline{D}_x \underline{\int}_I F = \overline{D}_x F = \overline{D}_x \overline{\int}_I F.$$

[6]) S. Saks, *Théorie de l'intégrale*, Monografie Matematyczne (Warszawa 1933), p. 105, lemme 2.

[7]) S. Saks, *Sur les fonctions d'intervalle*, loc. cit., p. 220, cor. 2.

[8]) Les th. 9 et 10 m'ont été communiqués par M. A. J. Ward.

Admettons que F est non décroissante par division. Il suffit de montrer que $\underline{D}_x\{F(I)-\overline{\int}_I F\}\geqslant 0$ presque partout dans R, puisque dans notre cas

$$(1) \qquad F(I)\leqslant \underline{\int}_I F\leqslant \overline{\int}_I F.$$

Si ce n'était pas vrai, on pourrait choisir un $\alpha>0$ tel qu'on ait $\underline{D}_x\{F(I)-\overline{\int}_I F\}<-\alpha$ dans un ensemble de mesure $A>0$. Considérons une division D de R telle que

$$(2) \qquad F(D)>\overline{\int}_R F-\tfrac{1}{2}A\alpha.$$

En vertu du lemme de Vitali, il existe un système S d'intervalles I tels que chaque I est intérieur à un intervalle de D, et l'on a:

$$(3) \qquad F(S)<\overline{\int}_S F-\alpha|S|, \qquad |S|>\tfrac{1}{2}A.$$

Soit D_1 une division de D telle que S fasse partie de D_1. La fonction $F(I)$ étant non décroissante par division, son intégrale supérieure est additive et nous avons d'après (2)

$$F(D_1)\geqslant F(D)>\overline{\int}_R F-\tfrac{1}{2}A\alpha\geqslant \overline{\int}_{D_1} F-\tfrac{1}{2}A\alpha,$$

donc, en vertu de (1),

$$F(S)>\overline{\int}_S F-\tfrac{1}{2}A\alpha>\overline{\int}_S F-\alpha|S|.$$

Nous arrivons ainsi à une contradiction.

Il résulte de la proposition établie que *la fonction F est presque partout régulièrement dérivable lorsqu'elle satisfait aux hypothèses du th. 9 et lorsqu'on a de plus $\overline{D}_xF<+\infty$ presque partout dans R.*

En effet, l'intégrale régulière inférieure de F est une fonction additive et, selon le th. 8, on a $\overline{D}_x\underline{\int}_I F<+\infty$, presque partout dans R. Or, M. Ward a prouvé que *toute fonction additive est presque partout régulièrement dérivable dès que sa dérivée régulière supérieure est presque partout $<+\infty$* [9]).

[9]) A. J. Ward, *On the derivation of additive functions of interval*, Fund. Math. **28** (1937), p. 271, th. 3.

Appliquons ces remarques à la fonction $\Phi(I)=\underline{\int}_I F$.

Comme Φ est non décroissante par division, il suffit d'admettre que les intégrales extrêmes de Φ sont finies et que $\overline{D}_x\Phi<\infty$. Mais:

$$\underline{\int}_I F\leqslant \underline{\int}_I\underline{\int}_I F\leqslant \overline{\int}_I\underline{\int}_I F, \qquad \underline{\int}_I\overline{\int}_I F\leqslant \overline{\int}_I\overline{\int}_I F\leqslant \overline{\int}_I F;$$

il suffit donc que les intégrales extrêmes de F soient finies et qu'on ait $\overline{D}_xF<+\infty$ (cf. th. 8).

On obtient ainsi le

Th. 10. *Si les intégrales régulières extrêmes de F dans R sont finies et la dérivée régulière supérieure (inférieure) de F est presque partout $<+\infty$ $(>-\infty)$, les intégrales de F sont presques partout régulièrement dérivables, et on a presque partout:*

$$\underline{D}_xF=D_x\underline{\int}_I F, \qquad \overline{D}_xF=D_x\overline{\int}_I F.$$

En particulier, si pour une fonction F régulièrement intégrable on a presque partout $\underline{D}_xF>-\infty$ ou $\overline{D}_xF<+\infty$, F est presque partout régulièrement dérivable et on a presque partout $D_xF=D_x\int_I F$.

Nous dirons qu'une fonction $F(I)$ est *continue* (uniformément) quand elle tend vers 0 avec $|I|$.

En réproduisant un raisonnement de M. Saks [10]) et faisant l'usage de la dénombrabilité d'hyperplans d'écart, nous pouvons établir la proposition suivante:

Th. 11. *Si les intégrales régulières extrêmes d'une fonction d'intervalle, continue et non croissante (non décroissante) par division, sont finies sur R, cette fonction est régulièrement intégrable.*

2. *Fonctions intégrables autour d'un ensemble.* Nous avons établi dans A une propriété caractéristique des fonctions régulièrement intégrables autour d'un ensemble [11]). En étudiant une fonction définie dans le complémentaire d'un ensemble fermé, nous allons établir d'autres propriétés caractéristiques de telles fonctions.

[10]) *Théorie de l'Intégrale*, l. cit., démonstration du th. 7, p. 106.
[11]) A, p. 20, th. 7 du § 4.

Désignons par S_E la partie du système S composée de tous les intervalles de S qui contiennent des points de E. Soit S^E la partie qui reste.

Rappelons que $F_E(I)=F(I)$, lorsque $EI\neq 0$, et que $F_E(I)=0$, lorsque $EI=0$.

Considérons une fonction $F(I)$, définie pour tous les intervalles I contenus dans $R-E$. Soit $F^E(I)=F(I)$, si $I\subset R-E$, et $F^E(I)=0$, si $IE\neq 0$. Cette nouvelle fonction est donc définie pour tous les intervalles de R. En particulier, si F est donnée pour tous les intervalles de R, on a $F^E=F-F_E$.

Th. 1. *Soient E un ensemble fermé et $F(I)$ une fonction additive, définie pour tous les intervalles I contenus dans $R-E$. Pour que la fonction F^E soit régulièrement intégrable dans R, il faut et il suffit qu'il existe pour tout $\varepsilon>0$ un $\delta_\varepsilon>0$ tel qu'on ait*

$$\left|\overline{\int}_{\overline{S}_E} F^E\right|<\varepsilon, \tag{1}$$

quel que soit le système élémentaire et régulier S de norme $<\delta_\varepsilon$.

La condition est *nécéssaire*. En effet, en vertu du th. 5, il existe un $\delta_\varepsilon>0$ tel que

$$\left|F^E(S)-\int_S F^E\right|<\varepsilon$$

pour tout système élémentaire et régulier S de norme $<\delta_\varepsilon$.

Mais, F étant additive et E étant fermé, nous avons

$$\int_S F^E=\int_{S_E} F^E+F^E(S),$$

de sorte que la condition (1) est satisfaite.

Pour prouver qu'elle est *suffisante* il suffit de remarquer que, D étant une division régulière quelconque de R, on a

$$\underline{\int}_{\overline{R}} F^E=\underline{\int}_{\overline{D}_E} F^E+F(D^E)\leqslant\overline{\int}_{D_E} F^E+F(D^E)=\overline{\int}_{R} F^E.$$

Donc, en prenant D de norme $<\delta_\varepsilon$, on obtient en vertu de la condition (1)

$$0\leqslant\overline{\int}_{R} F^E-\underline{\int}_{\overline{R}} F^E<2\varepsilon,$$

quel que soit $\varepsilon>0$.

Il résulte de cette démonstration que la fonction F^E est régulièrement intégrable quand le système S de l'énoncé est une division de R, même une division régulière.

Faisons décroître la norme de cette division. Nous obtenons alors l'égalité

$$\int_{RE}\overline{\int}_{\overline{I}} F^E=0 \tag{2}$$

comme une condition nécessaire et suffisante de l'intégrabilité régulière de F^E. La nécessité de cette condition a été établie dans A (th. 2, § 4). Posons:

$$G(I)=\underline{\int} F^E,\qquad H(I)=\overline{\int} F^E.$$

L'inégalité (1) prend alors l'une des formes suivantes:

$$|G_E(I)|<\varepsilon,\qquad |H_E(S)|<\varepsilon.$$

En divisant S en deux systèmes d'intervalles:

$$\begin{array}{lll} S_1 & \text{tel que} & H(I)\geqslant 0,\\ S_2 & \text{tel que} & H(I)<0,\end{array}$$

nous obtenons l'inégalité $|H|_E(S)<\varepsilon$, et l'inégalité $|G|_E(S)<\varepsilon$ s'obtient de la même manière.

Par suite

$$\int_{RE}\left|\overline{\int}_{\overline{I}} F^E\right|=0. \tag{3}$$

Th. 2. *Pour qu'une fonction additive F soit intégrable autour d'un ensemble fermé E, il faut et il suffit qu'on ait, quel que soit $\varepsilon>0$, $\left|\overline{\int}_{\overline{S}_E} F^E\right|<\varepsilon$ pour tout système élémentaire et régulier S de norme $<\delta_\varepsilon$, contenu dans le plus petit rectangle contenant E.*

En effet, F est régulièrement intégrable autour de E, lorsque F^E l'est dans le plus petit rectangle contenant E. Or, $F=F_E+F^E$; les fonctions F_E et F^E sont donc à la fois régulièrement intégrables ou bien non intégrables. Comme

$$F(I)=\overline{\int}_I F_E+\underline{\int}_{\overline{I}} F^E=\underline{\int}_{\overline{I}} F_E+\overline{\int}_I F^E,$$

l'égalité (2) peut être transformée en l'égalité

$$\overline{\int}_{R_E}\overline{\underline{\int}}_{I} F_E = \overline{\int}_{R} F_E.$$

Nous avons prouvé, dans A (§ 4, th. 1) que cette dernière égalité est une condition *nécessaire* pour l'intégrabilité régulière de F autour de E; nous voyons maintenant qu'elle est aussi *suffisante*.

En intégrant l'inégalité double

$$\left|\overline{\int}_{I} F_E\right| - \left|\underline{\int}_{I} F^E\right| \leqslant |F(I)| \leqslant \left|\overline{\int}_{I} F_E\right| + \left|\underline{\int}_{I} F^E\right|$$

et en appliquant l'égalité (3), on obtient la condition suivante, nécessaire pour l'intégrabilité régulière de F autour de E:

$$\overline{\int}_{R_E}\left|\overline{\underline{\int}}_{I} F_E\right| = \overline{\int}_{R}\left|\overline{\underline{\int}}_{I} F_E\right| = \overline{\int}_{R} |F_E|,$$

établie dans A (§ 4, th. 6).

Le th. 7 de A, § 4, pour E fermé, est une conséquence immédiate du th. 2 qui vient d'être démontré et de la définition de l'intégrale régulière d'une fonction d'intervalle; il doit être enoncé de la manière suivante:

Th. 3. *Pour qu'une fonction additive F soit régulièrement intégrable autour d'un ensemble E, il faut qu'il existe un ensemble élémentaire S_ε et un nombre positif δ_ε, tels que l'on ait*

$$|F^E(D)| < \varepsilon$$

pour chaque division régulière D de S_ε de norme $<\delta_\varepsilon$, et il suffit qu'il existe un tel système S_ε contenant intérieurement E.

En s'appuyant sur ce th. 3, on peut établir la propriété des fonctions non régulièrement intégrables autour d'un ensemble fermé, qui nous a servi dans la démonstration du th. 6 de A § 8.

Th. 4. *Si une fonction additive F n'est pas régulièrement intégrable autour d'un ensemble fermé E, il existe, quel que soit n, un système élémentaire S pour lequel*

$$|F(S)| > n.$$

En effet, il existe par suite de cette hypothèse un nombre $\varepsilon_1 > 0$ et, dans tout ensemble élémentaire S contenant intérieurement E, une division régulière D^1 telle que

$$(1) \qquad |F((D^1)^E)| \geqslant \varepsilon_1.$$

Soient:

$$\left.\begin{array}{llll} S_{11} = D_E^{11}, & \text{où } D^{11} & \text{est une division de} & R \\ S_{12} = D_E^{12}, & \text{où } D^{12} & \text{en est une de} & S_{11} \\ \ldots & & & \\ S_{1i} = D_E^{1i}, & \text{où } D^{1i} & \text{en est une de} & S_{1,i-1} \end{array}\right\} \text{assujettie à (1).}$$

Quand la suite $S_{11}, S_{12}, S_{13}, \ldots, S_{1i}, \ldots$ est infinie, on a pour une infinité d'indices $i_1, i_2, i_3, \ldots$ l'une des inégalités:

$$F((D^i)^E) > \varepsilon_1, \qquad F((D^i)^E) < -\varepsilon_1,$$

et le théorème est démontré, car il suffit de poser

$$S = (D^{i_1})^E + (D^{i_\alpha})^E + \ldots + (D^{i_k})^E \qquad \text{pour} \qquad k > n/\varepsilon_1.$$

Dans le cas contraire, soit n_1 le plus grand des i. Dans l'ensemble élémentaire S_{1n_1}, il n'y a pas de divisions pour lesquelles $|F(D^E)| \geqslant \varepsilon_1$, mais il peut exister un nombre $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ tel que l'on ait

$$(2) \qquad |F((D^2)^E)| \geqslant \varepsilon_2$$

au moins pour une division D^2 de S_{1n_1}. Posons alors:

$$\left.\begin{array}{llll} S_{21} = D_E^{21}, & \text{où } D^{21} & \text{est une division de} & S_{1n_1} \\ S_{22} = D_E^{22}, & \text{où } D^{22} & \text{en est une de} & S_{21} \\ \ldots & & & \\ S_{2i} = D_E^{2i}, & \text{où } D^{21} & \text{en est une de} & S_{2(i-1)} \end{array}\right\} \text{assujettie à (2).}$$

Lorsque la suite $S_{21}, S_{22}, \ldots, S_{2i}, \ldots$ n'est pas infinie, soit n_2 le nombre de ses termes. En partant de S_{2n_2}, on déterminera le nombre ε_3 et ainsi de suite. Si ε_k ne tend pas vers 0, le théorème est vrai. Supposons donc que $\varepsilon_k \to 0$. Etant donné un $\varepsilon > 0$, prenons un $\varepsilon_k < \varepsilon$. Nous avons donc $|F(D^E)| < \varepsilon_k < \varepsilon$ pour toute division D du système S_{kn_k} contenant intérieurement E, et la fonction auxiliaire F_E est régulièrement intégrable dans R.

Nous sommes arrivés ainsi à une contradiction [12]).

[12]) l'idée de ce raisonnement est due à M. M. Krzyżański.

3. *Fonctions à variation semi-bornée.* Soit $P(I)$ la partie *positive* de $F(I)$, c. à d. $P=\frac{1}{2}(F+|F|)$.

Posons $N=P-F$; alors $-N$ est la partie négative de F.

Nous dirons qu'une fonction F est $SVBr$ ou *à variation régulière semi-bornée supérieurement* dans R, lorsque la partie positive de F est à variation régulière bornée, ce qui s'écrit: $\overline{\int\limits_R} P<+\infty$.

On définit de la même manière les fonctions $IVBr$ ou *à variation régulière semi-bornée inférieurement* au moyen de la fonction N.

Comme $|F|=P+N$, on voit qu'une fonction $SVBr$ et $IVBr$ dans R est VBr. Des relations $-N\leqslant F\leqslant P$ on déduit immédiatement le

Th. 1. *L'intégrale régulière supérieure (inférieure) d'une fonction $SVBr$ ($IVBr$) est $<+\infty$ ($>-\infty$).*

Comme $\overline{\int\limits_R} N\leqslant\overline{\int\limits_R} P-\underline{\int\limits_R} F$, on a aussi la proposition suivante:

Th. 2. *Si l'intégrale régulière inférieure (supérieure) d'une fonction $SVBr$ ($IVBr$) est $>-\infty$ ($<+\infty$) dans R, cette fonction est VBr dans R.*

En particulier, toute fonction $SVBr$ régulièrement intégrable est VBr. De même, une fonction $SVBr$ non décroissante par division est VBr, donc régulièrement dérivable en vertu d'un théorème de M. Banach[13]).

Les intégrales extrêmes d'une fonction VBr étant finies, nous déduisons du th. 11, § 1, le corollaire suivant:

Th. 3. *Toute fonction continue, VBr et non croissante (non décroissante) par division est régulièrement intégrable*[14]).

Comme les dérivées régulières extrêmes d'une fonction VBr sont presque partout finies (A, § 3, th. 4), nous avons en vertu du th. 10, § 1, le

[13]) S. Banach, *Sur une classe de fonctions d'ensemble*, Fund. Math. **6** (1926), p. 177, th. 7.

[14]) A § 3, th. 3.

Th. 4. *Si F est VBr dans R, ses intégrales régulières extrêmes sont presque partout régulièrement dérivables et on a presque partout:*

$$\underline{D}_x F=D_x\underline{\int\limits_I} F, \qquad \overline{D}_x F=D_x\overline{\int\limits_I} F.$$

Ce th. 4 a été établi par M. Saks pour les fonctions d'intervalle linéaire[15]). En suivant son raisonnement, on pourrait déduire le th. 4 directement du th. 8, § 1, par l'application aux intégrales extrêmes du théorème précité de M. Banach, d'après lequel toute fonction VBr, non croissante (non décroissante) par division est régulièrement dérivable). En effet, les intégrales extrêmes d'une fonction VBr sont elles mêmes VBr. Cela résulte de l'inégalité

$$\overline{\int\limits_R}\Big|\overline{\int\limits_I} F\Big|\leqslant\overline{\int\limits_R}|F|<+\infty.$$

4. *Fonctions absolument semi-continues.* Les fonctions absolument semi-continues peuvent être aussi caractérisées au moyen des fonctions $P(I)$ et $N(I)$:

Th. 1. *Pour qu'une fonction F soit $SACr$ ($IACr$) dans R, il faut et il suffit que sa partie positive P (négative $-N$) y soit ACr.*

Th. 2. *Toute fonction $SACr$ ($IACr$) dans R est $SVBr$ ($IVBr$)*[16]), *donc son intégrale supérieure (inférieure) est $<+\infty$ ($>-\infty$).*

Ce théorème et le th. 2 du § 3 entraînent le

Th. 3. *Si l'intégrale régulière inférieure (supérieure) d'une fonction $SACr$ ($IACr$) est $>-\infty$ ($<+\infty$), cette fonction est VBr.*

Th. 4. *Si l'intégrale régulière supérieure (inférieure) de F est additive et $SACr$ ($IACr$), F est $SACr$ ($IACr$).*

Cela résulte du th. 5, § 1.

Dans A, § 2, nous avons énoncé la proposition suivante: *si F est une fonction $IACr$ dans R, on a:*

$$\underline{\int\limits_R} F\geqslant\int\limits_R \underline{D}_x F\,dx, \qquad \int\limits_R F\geqslant\overline{\int\limits_R}\overline{D}_x F\,dx,$$

dès que $\underline{D}_x F$ et $\overline{D}_x F$ sont sommables[17]).

[15]) S. Saks, l. c. Fund. Math. **10**, th. 8, p. 221.

[16]) J. C. Burkill, *Functions of intervals*, Proc. Lond. Math. Soc. **22** (1924), p. 287, th. 3, 6.

[17]) voir A, *Errata*, ce volume, p. 128.

D'après le th. 2, les intégrales extrêmes de F sont $>-\infty$. Si l'une d'elles est $=\infty$, l'inégalité correspondante est toujours vraie. On peut donc admettre que les deux intégrales extrêmes sont finies.

Th. 5. *Lorsque F est continue et additive dans R_0 et que l'ensemble des points où $\overline{D}_xF=\infty$ est contenu dans une somme dénombrable d'hyperplans $x_i=$ const., la fonction F est SACGr.*

Soit, en effet, $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, \dots$ la suite des hyperplans en question. Quel que soit l'ensemble fermé E dans R_0, il existe, F étant continue, un nombre n et une portion RE telle qu'on ait $RE \subset P_n$ ou bien telle qu'on ait

$$F(I) < n|I| \tag{1}$$

pour tout intervalle régulier I contenu dans R, contenant un point de E et ayant la norme $<1/n$.

Or, la portion RE contient une portion R_1E pour laquelle $n(R_1)<1/n$. L'inégalité (1) est donc satisfaite pour tout intervalle contenant un point de E et contenu dans R_1. Par suite, F est $SACr$ autour de F dans R_1.

Le th. 5 qui vient d'être établi, est une généralisation de la première partie du th. 7 de A §7 [18]).

Th. 6. *Si F est une fonction SACGr (IACGr), sa dérivée régulière supérieure (inférieure) est presque partout $<\infty$ $(>-\infty)$.*

C'est une généralisation d'une propriété établie par M. Krzyżański pour les fonctions $SACG$ [19]).

Quand la fonction F est en outre additive, elle est presque partout régulièrement dérivable en vertu du th. précité de M. Ward [8]).

Th. 7. *Lorsque F est continue et additive dans R_0 et que l'ensemble des points tels que $\overline{D}_xF=+\infty$ ou $\underline{D}_xF=-\infty$ est contenu dans une somme dénombrable d'hyperplans $x_i=$ const., la fonctions F est presque partout régulièrement dérivable, ACGr et Ir.*

En effet, F est presque partout régulièrement dérivable en vertu du th. de M. Ward [8]). Elle est $ACGr$ d'après le th. 5. Soit E un ensemble fermé dans R_0 et RE la portion autour de laquelle F est ACr. Comme la fonction auxiliaire F_E est ACr dans R et presque partout régulièrement dérivable, elle est régulièrement intégrable (A §5, th. 4). Ainsi F est Ir dans R_0.

[18]) la démonstration de la seconde partie du th. 7 de A §7, n'est pas correcte (voir A, *Errata*, ce volume, p. 128).

[19]) voir M. Krzyżański, Annales Soc. Pol. Math., Suppl. 1935, p. 29, th. 1.

Cette dernière remarque nous permet de simplifier la définition de l'intégrale régulière de Denjoy. La condition Ir est superflue [20]).

Th. 8. *Lorsque F est une fonction IACGr, non croissante par division et que $\underline{D}_xF \geqslant 0$ presque partout dans R, on a $F(R)\geqslant 0$.*

On le prouve de la même manière que le th. 4 de A §7.

Considérons maintenant un ensemble fermé E. Lorsque, F étant $IACGr$ dans R, la fonction auxiliaire F_E est VBr et régulièrement intégrable dans R, elle y est aussi $IACr$.

En effet, la fonction

$$S(I) = \int_I F_E - \int_I \overline{D}_xF\,dx$$

est $IACGr$ et en vertu du §3, th. 4, on a $D_xS=0$ presque partout dans R; donc, $S(I)$ est non négative (th. 8) et $\int_I F_E \geqslant \int_I \overline{D}_xF_E\,dx$. Il en résulte que F_E est $IACr$ dans R (th. 4).

Nous allons étendre ce résultat aux fonctions F_E non intégrables, en suivant un raisonnement de M. J. Marcinkiewicz:

Th. 9. *Lorsque, E étant un ensemble fermé et F étant une fonction SACGr (IACGr) dans R_0, la fonction auxiliaire F_E est VBr, dans R_0, elle y est SACr (IACr).*

Supposons, en effet, qu'il n'en est pas ainsi. Soit E^* l'ensemble des points x tels que F_E n'est pas $SACr$ dans aucun intervalle R contenant intérieurement x. L'ensemble E^* est fermé et contenu dans R_0. Nous allons voir qu'*il n'est pas vide*. Car, si $E^*=0$, il existe pour tout point x de R_0 un voisinage V_x tel que F_E est $SACr$ dans le voisinage U_x concentrique de V_x, de dimensions doubles de celles de V_x. Comme E est fermé, il existe en vertu du lemme connu de Borel-Lebesgue un nombre fini de V_x couvrant R_0; soient $V_{x_1}, V_{x_2}, \dots, V_{x_n}$ ces voisinages. Considérons un système élémentaire et régulier S contenu dans R_0. Lorsque $|S|$ est petit, il en est de même de la norme de S. Il existe donc, pour tout $\varepsilon>0$ un $\delta_\varepsilon>0$ tel que:

1° $|S|$ étant $<\delta_\varepsilon$ et T un système élémentaire contenu dans V_{x_i} et dans S, on a $F(T)<\varepsilon$,

2° tout intervalle de S est contenu dans un des voisinages U_{x_i}.

[20]) cf. A §9, p. 32.

Nous aurions donc, en désignant par S_i la partie de S composée d'intervalles contenus dans Ux_i, mais qui ne sont pas contenus dans $Ux_1, Ux_2, \ldots, Ux_{i-1}$,

$$F(S) = \sum_{i=1}^{n} F(S_i) < n\varepsilon,$$

et F serait $SACr$ dans R_0, contrairement à l'hypothèse.

Ainsi $E^* \neq 0$. F étant $SACGr$ dans R, il existe une portion R_1E^* telle que F est $SACr$ autour de cette portion. Soit R_2 le plus petit intervalle contenant R_1E^*. Comme $R_2E^* \neq 0$, F_E ne peut pas être $SACr$ dans R_2, c. à d. il existe un $\varepsilon > 0$ tel que, étant donné un $\delta > 0$, on peut déterminer un système régulier S_δ contenu dans R_2 et satisfaisant aux conditions:

(1) $$|S_\delta| < \delta, \qquad F_E(S_\delta) > \varepsilon.$$

Mais, F_{E^*} étant $SACr$ dans R_2, nous pouvons choisir δ de manière qu'on ait

(2) $$F_{E^*}(S) < \varepsilon/3,$$

quel que soit le système régulier S de mesure $< \delta$.

Soit S'_δ le système composé de tous les intervalles de S_δ qui ne contiennent pas de points de E^*. D'après les inégalités (1) et (2), nous avons

(3) $$F(S'_\delta) > 2\varepsilon/3.$$

Considérons maintenant un système élémentaire T dont les intervalles ne contiennent pas de points de E^*. Comme E^* est fermé, nous pouvons construire un système T' jouissant de la même propriété, en allongeant de $2a$ les côtés des intervalles de T, de manière à en obtenir un intervalle concentrique.

F_E étant $SACr$ dans T', le nombre δ peut être déterminé de manière que l'inégalité $|S| < \delta$ entraîne

(4) $$F_E(S) < \varepsilon/3,$$

quel que soit le système régulier S contenu dans T'.

Soit S''_δ la partie de S'_δ composée de tous les intervalles qui ne contiennent pas de points de T. Comme les intervalles de $S = S'_\delta - S''_\delta$ sont réguliers, ils sont contenus dans T' dès que δ est suffisamment petit. S satisfait donc à la condition (4). Nous avons par suite

$$F_E(S''_\delta) > \varepsilon/3.$$

Ceci établi, nous pouvons montrer que F_E n'est pas VBr. En effet, déterminons d'abord un système S''_δ pour $T=0$ et désignons-le par S_1; ensuite déterminons S''_δ pour $T = S_1$ et désignons-le par S_2, et ainsi de suite. Les systèmes réguliers ainsi définis $S_1, S_2, \ldots, S_n$ étant deux à deux disjoints, nous avons

$$F_E(S_1 + S_2 + \ldots + S_n) > n\varepsilon/3,$$

quel que soit n. Tous les S_i étant contenus dans R_2, on a donc $\int_{R_2} |F|_E = \infty$, contrairement à l'hypothèse.

5. *Les majorantes et les minorantes de Ridder.* Nous avons défini dans A § 10, une minorante et une majorante au sens de Ridder[21]). Nous allons maintenant généraliser ces deux notions.

Nous dirons qu'une fonction $\Phi(I)$ est *une minorante de Ridder au sens étendu* d'une fonction $f(x)$ dans R_0, lorsque:

1° elle est continue dans R_0,

2° elle y est $SACGr$,

3° $\overline{D}_x\Phi \leqslant f(x)$ presque partout dans R_0.

On définit de la même manière une *majorante* $\Psi(I)$.

Une fonction $F(I)$ est *intégrale régulière de Ridder au sens étendu* de $f(x)$ dans R_0, lorsqu'elle est additive et qu'il existe pour chaque $\varepsilon > 0$ une minorante Φ^ε et une majorante Ψ^ε telles qu'on a:

(1) $$0 \leqslant F(S) - \Phi^\varepsilon(S) < \varepsilon, \qquad 0 \leqslant \Psi^\varepsilon(S) - F(S) < \varepsilon$$

pour tout système élémentaire S dans R_0.

En particulier, cela arrive lorsque les minorantes Φ sont non décroissantes et les majorantes Ψ non croissantes par division et qu'on a

$$F(I) = \sup \Phi(I) = \inf \Psi(I).$$

En effet, comme $\underline{D}_x(\Psi - \Phi) \geqslant \underline{D}_x\Psi - \overline{D}_x\Phi \geqslant 0$ presque partout dans R_0, nous avons $\Psi(I) - \Phi(I) \geqslant 0$ selon le th. 8 du § 4. D'autre part, F est une fonction additive. Pour prouver que F est l'intégrale satisfaisant aux conditions (1), déterminons, étant donné un $\varepsilon > 0$, les fonctions Φ et Ψ de manière qu'on ait:

$$F(R_0) - \Phi(R_0) < \varepsilon, \qquad \Psi(R_0) - F(R_0) < \varepsilon.$$

Or, F étant additive, $F - \Phi$ et $\Psi - F$ sont non croissantes par division et non négatives. Par suite:

$$0 \leqslant F(S) - \Phi(S) \leqslant F(R_0) - \Phi(R_0), \qquad 0 \leqslant \Psi(S) - F(S) \leqslant \Psi(R_0) - F(R_0).$$

[21]) A, p. 35.

Nous allons voir que la notion d'intégrale $F(I)$ ainsi définie est équivalente à celle d'intégrale régulière de Denjoy.

Th. 1. *La minorante Φ^ε et la majorante Ψ^ε sont VBGr dans R_0.*

Soit, en effet, E un ensemble fermé contenu dans R_0. Comme Φ^ε est $SACGr$ et Ψ^ε est $IACGr$, il existe une portion $R^\varepsilon E$ autour de laquelle Φ^ε est $SACr$ et Ψ^ε est $IACr$.

Soit R_1^ε le plus petit rectangle contenant $R^\varepsilon E$. Nous avons donc, en vertu du th. 2, §4,

$$\overline{\int_{R_1^\varepsilon}}\Phi^\varepsilon<+\infty,\qquad \underline{\int_{R_1^\varepsilon}}\Psi^\varepsilon>-\infty.$$

Mais, selon la condition (1)

$$0\leqslant\Psi_E^\varepsilon(D)-\Phi_E^\varepsilon(D)<2\varepsilon,$$

quelle que soit la division D de R_0. Par suite:

$$-\infty<\underline{\int_{R_1^\varepsilon}}\Psi_E^\varepsilon-2\varepsilon<\underline{\int_{R_1^\varepsilon}}\Phi_E^\varepsilon,\qquad \overline{\int_{R_1^\varepsilon}}\Psi^\varepsilon<\overline{\int_{R_1^\varepsilon}}\Phi_E^\varepsilon+2\varepsilon<+\infty;$$

donc, en vertu du th. 3, §4, les fonctions Φ_E^ε et Ψ_E^ε sont VBr dans R_1^ε et, par conséquent, Φ^ε et Ψ^ε sont $VBGr$ dans R_0.

Th. 2. *Toutes les minorantes Φ^ε et toutes les majorantes Ψ^ε sont VBr autour d'une portion RE qui ne dépend pas de ε.*

Soit, en effet, $R^{\varepsilon_0}E$ une portion autour de laquelle les fonctions Φ^{ε_0} et Ψ^{ε_0} sont VBr. Désignons par $R_1^{\varepsilon_0}$ le plus petit rectangle contenant $R^{\varepsilon_0}E$. Comme $0\leqslant F_E(S)-\Phi_E^{\varepsilon_0}(S)<\varepsilon_0$, nous avons, D étant une division de $R_1^{\varepsilon_0}$,

$$|F|_E(D)\leqslant|F-\Phi^{\varepsilon_0}|_E(D)+|\Phi^{\varepsilon_0}|_E(D)\leqslant|\Phi^{\varepsilon_0}|_E(D)+2\varepsilon_0$$

et par suite

$$\overline{\int_{R_1^{\varepsilon_0}}}|F|_E\leqslant\overline{\int_{R_1^{\varepsilon_0}}}|\Phi^{\varepsilon_0}|_E+2\varepsilon_0<+\infty.$$

D'autre part,

$$|\Phi^\varepsilon|_E(D)\leqslant|F-\Phi^\varepsilon|_E(D)+|F|_E(D)<|F|_E(D)+2\varepsilon,$$

$$|\Psi^\varepsilon|_E(D)\leqslant|F|_E(D)+|\Psi^\varepsilon-F|_E(D)<|F|_E(D)+2\varepsilon$$

quelle que soit la division D de $R_1^{\varepsilon_0}$. Par suite

$$\overline{\int_{R_1^{\varepsilon_0}}}|\Phi^\varepsilon|_E,\qquad \overline{\int_{R_1^{\varepsilon_0}}}|\Psi^\varepsilon|_E<\overline{\int_{R_1^{\varepsilon_0}}}|F|_E+2\varepsilon<+\infty;$$

donc Φ^ε et Ψ^ε sont VBr autour de $R^{\varepsilon_0}E$.

Th. 3. *L'intégrale régulière de Ridder au sens étendu est une fonction ACGr.*

Revenons aux fonctions Φ^ε et Ψ^ε définies dans le raisonnement précédent. Comme Φ^ε est $SACGr$ dans R_0, tandis que Ψ^ε est $IACGr$, on voit, d'après le th. 9 du §4, que Φ^ε est $SACr$ et Ψ_ε $IACr$ autour de la portion $R^{\varepsilon_0}E$, autour de laquelle ils sont VBr en vertu du th. 2.

Il existe donc un $\delta_\varepsilon>0$ pour lequel on a:

$$\Phi_E^\varepsilon(S)<\varepsilon,\qquad \Psi_E^\varepsilon(S)>-\varepsilon, \tag{2}$$

quel que soit le système régulier S de norme $<\delta_\varepsilon$, contenu dans $R_1^{\varepsilon_0}$.

Les inégalités (1) et (2) entraînent

$$-2\varepsilon<\Psi_E^\varepsilon(S)-\varepsilon<F_E(S)<\Phi_E^\varepsilon(S)+\varepsilon<2\varepsilon.$$

Ainsi F est ACr autour de $R^{\varepsilon_0}E$, donc $ACGr$ dans R_0 [22].

Le raisonnement par lequel nous avons établi, dans A §10, que $D_xF=f(x)$ presque partout dans R_0 subsiste pour l'intégrale de Ridder au sens étendu. Nous pouvons donc énoncer la conclusion suivante:

Th. 4. *Toute fonction régulièrement intégrable au sens étendu de Ridder est régulièrement intégrable au sens de Denjoy.*

La réciproque est évidente.

6. *L'intégrale de Perron.* Nous allons étendre la notion d'intégrale régulière de Perron de manière qu'elle soit équivalente à celle d'intégrale régulière de Denjoy.

Nous dirons qu'une fonction $\Phi(I)$ est *une minorante régulière de Perron au sens étendu* d'une fonction $f(x)$ dans R_0, lorsqu'elle satisfait aux conditions suivantes:

1° elle est continue,

2° $\overline{D}_x\Phi<\infty$ à l'exception des points x situés sur une infinité dénombrable d'hyperplans $x_i=$const.,

3° $\overline{D}_x\Phi\leqslant f(x)$ presque partout dans R_0.

[22]) cette démonstration est un développement du raisonnement de A, p. 37.

On définit de la même manière une *majorante* $\Psi(I)$.

Une fonction $F(I)$ est *intégrale régulière de Perron au sens étendu* de $f(x)$, lorsqu'elle est additive et qu'il existe, quel que soit $\varepsilon>0$, une minorante Φ et une majorante Ψ de $f(x)$ telles qu'on a:

$$0 \leqslant F(S)-\Phi(S)<\varepsilon, \qquad 0 \leqslant \Psi(S)-F(S)<\varepsilon$$

pour tout système élémentaire S dans R_0.

Th. 1. *Toute fonction régulièrement intégrable au sens étendu de Perron est régulièrement intégrable au sens de Ridder.*

Cela résulte du § 4, th. 5.

Pour voir que l'intégrale qui vient d'être définie est équivalente à celle de Denjoy, nous allons établir le

Th. 2. *Soit $f(x)$ une fonction s'annulant en tout point d'un ensemble fermé E contenu dans R et régulièrement intégrable au sens étendu de Perron dans chaque intervalle contenu dans $R-E$. Soit $F(I)$ une fonction d'intervalle, égale à l'intégrale régulière de Perron au sens étendu de $f(x)$ sur tout intervalle I contenu dans $R-E$.*

Alors, si la fonction $F^E(I)$ est régulièrement intégrable dans R, $f(x)$ est régulièrement intégrable au sens étendu de Perron dans R et son intégrale est égale à $\int_R F^E$.

Considérons dans R_0, contenant E, un réseau composé de divisions régulières $D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots$ dont les normes tendent vers 0 avec n tendant vers infini. Il résulte de la définition de l'intégrale régulière d'une fonction d'intervalle que

$$\int_R F^E = \lim_{n\to\infty} F^E(RD_n),$$

RD_n étant une division de R par D_n.

Posons $G(R)=\int_R F^E$ et:

$$S_1=D_1^E, \qquad S_n=D_n^E-D_{n-1}^E \qquad \text{pour} \quad n=2,3,\ldots$$

On a évidemment:

$$R_0-E=\sum_{n=1}^{\infty} S_n, \qquad G(R)=\sum_{n=1}^{\infty} F(RS_n),$$

en admettant que $G(I)=0$, si I se réduit à un segment.

Déterminons dans S_n une majorante Ψ_n satisfaisant à la condition

$$0 \leqslant \Psi_n(S)-G(S)<\varepsilon/3.2^{n+2}$$

pour tout système élémentaire S contenu dans S_n.

Soit ensuite

$$H(I)=\sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(IS_n).$$

Nous avons donc

(1) $$0 \leqslant H(S)-G(S)<\varepsilon/12.$$

S étant un système élémentaire quelconque, nous pouvons poser successivement $S=S^1, S^2, S^3, S^4$, en désignant par S^i la partie de S composée de tous les intervalles I pour lesquels $G(I)$ et $H(I)$ ont un signe constant. Par suite

(2) $$\big||H|(S)-|G|(S)\big|<\varepsilon/3.$$

Soit n_ε un indice tel qu'on ait, d'après le théorème 1 du § 2,

(3) $$|G|_E(SD_{n_\varepsilon})<\varepsilon/3.$$

Considérons maintenant la fonction

$$\Psi(I)=H(I)+|H|_E(ID_{n_\varepsilon}).$$

Nous allons voir que Ψ est une majorante de Perron au sens étendu de $f(x)$, et qu'elle satisfait à la condition

$$0 \leqslant \Psi(S)-G(S)<\varepsilon.$$

Vérifions d'abord cette condition. On a

$$0 \leqslant \Psi(S)-G(S)=H(S)-G(S)+|H|_E(SD_{n_\varepsilon})-|G|_E(SD_{n_\varepsilon})+|G|_E(SD_{n_\varepsilon})<\varepsilon$$

en vertu des inégalités (1), (2) et (3).

Pour voir que les autres conditions sont satisfaites, considérons un point x de $R-E$. Il appartient à l'un des ensembles élémentaires S_n et, en negligeant une infinité dénombrable de frontières d'intervalles, il est un point intérieur de S_n. Donc, un intervalle suffisamment petit I contenant x est contenu dans S_n. Par conséquent $\Psi(I) \geqslant H(I)=\Psi_n(I)$ et $\underline{D}_x\Psi \geqslant \underline{D}_x\Psi_n$.

Comme Ψ_n est une majorante, nous avons:

1° $\underline{D}_x\Psi>-\infty$ si x est dans $R-E$ et n'appartient pas à une infinité dénombrable de frontières des intervalles,

2° $\underline{D}_x\Psi \geqslant f(x)$ en pleine épaisseur de R_0-E.

D'autre part, soit x un point de E n'appartenant pas aux frontières des intervalles. Quand la norme d'un intervalle I contenant x est suffisamment petite, I est contenu dans $(D_{n_\varepsilon})_E$, et même dans un intervalle de D_{n_ε}. Donc:

$$\Psi(I) \geqslant H(I) + |H|(I) \geqslant 0, \qquad \underline{D}_x \Psi \geqslant 0 = f(x).$$

Comme la continuité de Ψ résulte de celle des fonctions Ψ_n, on voit que Ψ est une majorante de Perron au sens étendu.

Dans A, p. 35, nous avons appelé *complète* toute opération intégrale $S(f,I)$ qui est continue et satisfait à la condition suivante: si $f(x)$ est intégrable (S) sur toute portion RE de l'ensemble fermé E et si la fonction $S^E(f,I)$ est régulièrement intégrable dans R, la fonction $f(x)$ est intégrable (S) dans R et on a

$$(4) \qquad S(f,R) = \int_{RE} f\,dx + \int_R S^E(f,I).$$

En nous appuyant sur le th. 2, nous allons établir le

Th. 3. *L'intégrale régulière de Perron au sens étendu est une opération complète.*

Soit $f(x)$ une fonction intégrable au sens étendu de Perron sur toute portion RE de l'ensemble fermé E et dans tout intervalle contenu dans $R-E$. Supposons ensuite que $S^E(f,I)$ est régulièrement intégrable dans R.

Posons:

$$f_E(x) = \begin{cases} f(x) & \text{sur } E, \\ 0 & \text{sur } R-E, \end{cases} \qquad f^E = f - f_E.$$

Comme $f = f_E + f^E$, nous avons, en désignant par $S(f,E)$ l'intégrale de Perron au sens étendu,

$$(5) \qquad S(f,R) = S(f_E,R) + S(f^E,R),$$

car l'intégrale de Perron est un opération additive. Mais, f étant sommable sur E, on a

$$(6) \qquad S(f_E,R) = \int_{RE} f\,dx.$$

D'autre part, la fonction f^E vérifie les hypothèses du th. 2, donc

$$(7) \qquad S(f^E,R) = \int_R S^E(f^E,I) = \int_R S^E(f,I).$$

Les égalités (5), (6) et (7) donnent la relation (4), de sorte que S est une opération complète.

Th. 4. *Toute fonction régulièrement intégrable au sens de Denjoy est régulièrement intégrable au sens étendu de Perron.*

En effet, d'après A § 9, th. 6, l'intégrale régulière de Denjoy est la plus faible opération complète embrassant l'intégrale de Lebesgue. Or, l'intégrale de Perron au sens étendu embrasse l'intégrale de Lebesgue et, en vertu du th. 3, est une opération complète. Par conséquent, toute intégrale régulière de Denjoy est une intégrale régulière de Perron au sens étendu.

Le th. 4 qui vient d'être établi et le th. 5 de A § 10 montrent que ces deux intégrales sont équivalentes.

Nous avons ainsi généralisé le théorème de MM. Hake, Aleksandroff et Looman.

7. *Minorantes et majorantes additives.* M. Marcinkiewicz a prouvé, en s'appuyant sur le théorème de M. Hake, qu'une fonction d'une variable réelle ayant au moins une minorante et une majorante additives est intégrable au sens de Perron [23]).

Nous allons étendre cette propriété aux fonctions de deux et plusieurs variables.

Th. 1. *Lorsqu'une minorante Φ et une majorante Ψ régulières de Perron au sens étendu d'une fonction $f(x)$ dans R_0 sont additives, elles sont VBGr.*

En effet, on a presque partout $\underline{D}_x\Psi - \overline{D}_x\Phi \geqslant 0$, donc

$$(1) \qquad \Psi(I) - \Phi(I) \geqslant 0.$$

Considérons un ensemble fermé E contenu dans R_0. Soit RE une portion telle que

$$(2) \qquad \Phi(I) < n|I|, \qquad \Psi(I) > -n|I|,$$

quel que soit I contenant un point de E, contenu dans R et dont la norme est $<1/n$. Déterminons une portion R_1E de RE telle que $n(R_1) < 1/n$. Les inégalités (1) et (2) entraînent

$$\Phi(I) - \Psi(I) - n|I| \leqslant \Phi(I) \leqslant \Psi(I) \leqslant \Psi(I) - \Phi(I) + n|I|,$$

quel que soit dans R_1 l'intervalle I contenant un point de E.

[23]) Ce théorème m'a été communiqué par M. Marcinkiewicz; cf. aussi S. Saks, *Theory of the Integral*, Monografie Matematyczne (Warszawa-Lwów 1937), p. 253.

Par conséquent, D étant une division de R, on a:

$$|\Phi|_E(D), |\Psi|_E(D) \leqslant \Psi(R) - \Phi(R) + n|R|,$$

et les fonctions Φ et Ψ sont VBr autour de R_1E.

Th. 2. Lorsqu'une fonction $f(x)$ a dans R_0 une minorante régulière de Perron au sens étendu et une majorante au même sens, toutes les deux additives et Ir, cette fonction est régulièrement intégrable au sens étendu de Perron.

En effet, considérons dans R_0 un ensemble E de points dans le voisinage desquels $f(x)$ n'est pas régulièrement intégrable au sens étendu de Perron. L'ensemble E est évidemment fermé.

Nous allons montrer que cet ensemble contient une portion RE telle que:

1° $f(x)$ est sommable sur RE,

2° $F(I)$ étant l'intégrale régulière de Perron au sens étendu de $f(x)$ dans $I \subset R - E$, la fonction F^E est régulièrement intégrable dans R.

Soit à ce but RE une portion autour de laquelle la minorante donnée Φ et la majorante donnée Ψ sont VBr et régulièrement intégrables. Désignons par R_1 le plus petit intervalle contenant RE.

Comme les dérivées régulières des fonctions VBr sont sommables (A § 3, th. 4) et comme, d'autre part, on a $\overline{D}_x\Phi_E \leqslant f(x) \leqslant \underline{D}_x\Psi_E$ presque partout dans E, on voit que $f(x)$ est sommable sur R_1E.

Considérons maintenant l'intégrale $F(I)$ de $f(x)$ dans I. Les fonctions Φ_E et Ψ_E étant intégrables dans R_1, les intégrales extrêmes des fonctions Φ^E et Ψ^E satisfont aux conditions:

$$\Big|\overline{\underline{\int}}_{S_E} \Phi^E\Big| < \varepsilon, \qquad \Big|\overline{\underline{\int}}_{S_E} \Psi^E\Big| < \varepsilon$$

pour tout système régulier S de norme $< \delta_\varepsilon$, contenu dans R_1. Or,

$$\Phi^E(I) \leqslant F^E(I) \leqslant \Psi^E(I),$$

donc, pour les intégrales de F^E, on a aussi l'inégalité $\Big|\overline{\underline{\int}}_{S_E} F^E\Big| < \varepsilon$; ainsi F^E est intégrable dans R_1.

Pour achever la démonstration, il suffit de remarquer que l'intégration régulière de Perron au sens étendu est une opération complète. Comme les conditions 1° et 2° sont satisfaites, F est régulièrement intégrable au sens étendu de Perron dans R_1, contrairement à la définition de l'ensemble E.

Il résulte de la démonstration des th. 1 et 2 que la minorante peut être supposée non décroissante par division et la majorante non croissante par division.

Les minorantes et les majorantes de Ridder jouissent des mêmes propriétes que celles de Perron:

Th. 3. Lorsqu'une minorante Φ de Ridder au sens étendu et une majorante Ψ au même sens d'une fonction $f(x)$ dans R_0 sont additives, elles sont $VBGr$ dans R_0.

Soient, en effet, E un ensemble fermé dans R_0 et RE une portion autour de laquelle Φ est $SACr$ et Ψ est $IACr$. La fonction $\Psi - \Phi$ étant additive, nous avons $\Psi(I) - \Phi(I) \geqslant 0$ et

$$\Phi(R) - \Psi(R) + \Psi_E(S) \leqslant \Phi_E(S) \leqslant \Psi_E(S) \leqslant \Psi(R) - \Phi(R) + \Phi_E(S),$$

quel que soit le système élémentaire S.

Déterminons $\delta_\varepsilon > 0$ de manière qu'on ait:

$$\Phi_E(S) < \varepsilon, \qquad \Psi_E(S) < -\varepsilon,$$

lorsque $|S| < \delta_\varepsilon$ et que les intervalles de S sont contenus dans le plus petit intervalle contenant RE. Décomposons S en 4 systèmes S^1, S^2, S^3, S^4, définis p. 123. Nous aurons $|\Phi|_E(D), |\Psi|_E(D) \leqslant 4[\Psi(R) - \Phi(R)] + 4\varepsilon$, de sorte que Φ et Ψ sont VBr autour de RE.

Th. 4. Pour qu'une fonction $f(x)$ soit régulièrement intégrable au sens de Denjoy, il faut et suffit qu'il existe une minorante régulière de $f(x)$ de Ridder au sens étendu et une majorante au même sens, additives et Ir.

En reproduisant la démonstration du th. 2, on prouve, en effet, que $f(x)$ satisfaisant à la condition de l'énoncé est régulièrement intégrable au sens étendu de Perron, donc régulièrement intégrable au sens de Denjoy.

La condition est *nécessaire* car l'intégrale de Denjoy est à la fois une minorante et une majorante, additive et Ir.

Les théorèmes 3 et 4 subsistent pour une minorante non décroissante par division et une majorante non croissante par division.