Fonctions additives non complètement additives et fonctions non mesurables.

Par

W. Sierpiński (Warszawa).

Plusieurs mathématiciens ont posé récemment la question si l'on peut nommer effectivement une fonction non négative finie $f(E)$, définie pour les sous-ensembles E d'un ensemble dénombrable D, et qui soit additive sans être complètement additive [1]). Le but de cette Note est de démontrer que si l'on pouvait nommer une telle fonction, ne prenant que les valeurs 0 et 1, on pourrait aussi nommer une fonction non mesurable (L) d'une variable réelle.

N désignant l'ensemble de tous les nombres naturels, soit $f(E)$ une fonction qui est définie pour tous les sous-ensembles de N, ne prend que les valeurs 0 et 1, est additive, c. à. d. telle que

$$f(E_1+E_2)=f(E_1)+f(E_2) \quad \text{pour} \quad E_1 \subset N,\ E_2 \subset N,\ E_1E_2=0,$$

sans être complètement (c. à. d. dénombrablement) additive [2]).

Nous allons démontrer d'abord que

$$f((n))=0 \quad \text{pour} \quad n=1,2,3,\dots, \tag{1}$$

(n) désignant l'ensemble formé d'un seul nombre n.

---

[1]) Voir p. ex. le livre de Paul Lévy, *Théorie de l'addition de variables aléatoires*, Paris, Gauthier-Villars 1937, p. 12.

[2]) L'existence d'une telle fonction résulte d'un théorème de M. A. Tarski, démontré à l'aide de l'axiome du choix: voir Fund. Math. **15**, p. 42-50; cf. aussi S. Ulam, Fund. Math. **14**, p. 231-233.

En effet, s'il existait un nombre naturel p pour lequel $f((p))\neq 0$, on aurait $f((p))=1$, puisque la fonction f ne prend que les valeurs 0 et 1. Soit E un sous-ensemble de N contenant p. La fonction f étant additive, on a

$$f(E)=f(E-(p))+f((p)),$$

d'où, vu que $f((p))=1$ et que la fonction f ne prend que les valeurs 0 et 1,

$$f(E)=1.$$

Soit maintenant E un sous-ensemble de N ne contenant pas p. La fonction f étant additive, on a

$$f(E+(p))=f(E)+f((p)),$$

d'où, vu que $f((p))=1$, on trouve

$$f(E)=0.$$

La fonction $f(E)$ serait donc égale à 1 si $p \epsilon E$, et égale à 0 si p non ϵE. Une telle fonction serait évidemment complètement additive, contrairement à l'hypothèse. La formule (1) est ainsi établie.

Or, si l'on avait $f(N)=0$, la fonction f étant additive et ne prenant que les valeurs 0 et 1, on aurait $f(E)=0$ pour $E \subset N$ et la fonction f serait complètement additive, contrairement à l'hypothèse. On a donc

$$f(N)=1.$$

Nous définirons maintenant la fonction $\varphi(x)$ d'une variable réelle x comme il suit. Désignons par $G(x)$ le plus grand entier inférieur à x, et soit

$$x=G(x)+\frac{1}{2^{n_1}}+\frac{1}{2^{n_2}}+\frac{1}{2^{n_3}}+\dots \tag{2}$$

le développement du nombre x en fraction dyadique esssentiellement infinie (un tel développement est, comme on sait, bien déterminé pour tout nombre réel x). Posons

$$\varphi(x)=f((n_1, n_2, n_3, \dots)).$$

La fonction $\varphi(x)$ est ainsi définie pour tout x réel.

Je dis qu'elle est non mesurable (L).

Admettons, par contre, que la fonction $\varphi(x)$ soit mesurable (L). Les ensembles

$$(3) \qquad \underset{x}{E}[\varphi(x)=0] \quad \text{et} \quad \underset{x}{E}[\varphi(x)=1]$$

sont donc mesurables et, leur somme étant évidemment l'ensemble de tous les nombres réels, l'un au moins de ces ensembles est de mesure positive (finie ou infinie).

Or, soit x un nombre réel avec le développement (2) en fraction dyadique infinie. Soit $m_1, m_2, m_3, \ldots$ la suite (finie ou infinie) qu'on obtient en supprimant dans la suite $1, 2, 3, \ldots$ les nombres de la suite $n_1, n_2, n_3, \ldots$ Posons

$$(4) \qquad y=-G(x)+\frac{1}{2^{m_1}}+\frac{1}{2^{m_2}}+\frac{1}{2^{m_3}}+\ldots$$

Evidemment $x+y=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=1$, donc $y=1-x$. Si le développement (4) est infini, $\varphi(y)=f((m_1, m_2, m_3, \ldots))$ et comme

$$\varphi(x)=f((n_1, n_2, n_3, \ldots)), \quad f(N)=1$$

et

$$(n_1, n_2, n_3, \ldots)+(m_1, m_2, m_3, \ldots)=N,$$

la fonction f étant additive, il vient $\varphi(y)=1-\varphi(x)$.

Donc: si x est un nombre réel et si $1-x$ n'est pas une fraction dyadique finie, on a

$$\varphi(1-x)=1-\varphi(x).$$

Par conséquent, si $\varphi(x)=0$, on a $\varphi(1-x)=1$, et si $\varphi(x)=1$, on a $\varphi(1-x)=0$. Il en résulte tout de suite que, abstraction faite d'un ensemble dénombrable de points, les ensembles (3) sont symétriques l'un à l'autre par rapport au point 1/2 comme centre de symétrie; ils sont donc de mesure positive tous les deux.

Or, soit r une fraction dyadique finie quelconque. Le développement dyadique infini du nombre $x+r$ ne diffère évidemment du développement de x que par un nombre fini de termes. La fonction $f(E)$ étant nulle, quand E est formé d'un seul nombre, elle est encore nulle (en tant qu'additive) pour tout ensemble fini. On a donc $f(E_1)=f(E_2)$ quand les ensembles E_1 et E_2 ne diffèrent

que par un nombre fini d'éléments. Il en résulte en vertu de la définition de la fonction φ que $\varphi(x+r)=\varphi(x)$, de sorte que toute translation (le long de la droite) de chacun des ensembles (3) à une distance qui s'exprime par une fraction dyadique finie transforme cet ensemble en lui-même. On en conclut d'après les propriétés connues des ensembles mesurables que les ensembles (3), qui sont de mesure positive (finie ou infinie), ont chacun la mesure 1 dans l'intervalle $\langle 0,1 \rangle$, ce qui est impossible, puisqu'ils sont disjoints.

La fonction $\varphi(x)$ est donc non mesurable (L), c. q. f. d.