# Sur les transformations à petites tranches.

Par

Samuel Eilenberg (Warszawa).

**1.** Une transformation continue $f$ d'un espace métrique $X$ s'apelle *transformation à $\varepsilon$-tranches* [1]), lorsque $\delta[f^{-1}(y)]<\varepsilon$ [2]) pour tout $y\in f(X)$.

***Théorème.*** *$X$ étant un rétracte absolu de voisinage* [3]) *il existe pour tout $\eta>0$ un $\varepsilon>0$ tel que, étant donnée une transformation quelconque à $\varepsilon$-tranches $f$ de $X$, il existe une transformation continue $\varphi$ de $f(X)$ en sous-ensemble de $X$, assujettie à la condition*

$$|\varphi f(x)-x|<\eta \qquad \textit{pour tout} \quad x\in X.$$

Démonstration. Soit $\{f_n\}$ une suite de $\varepsilon_n$-transformations de $X$ et $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$. La suite des espaces $X, f_1(X), f_2(X),\dots$ peut alors être plongée dans un espace $Z=X+\sum_{n=1}^{\infty}f_n(X)$ tel que la suite de fonctions $\{f_n\}$ converge uniformément (dans l'espace $Z$) vers la transformation $f_0(x)=x$ (transformation de $X$ en $X$ par l'identité) [4]).

$X$ étant un rétracte absolu de voisinage, il existe un ensemble ouvert $U$, tel que $X\subset U\subset Z$, et une fonction continue $\varphi$ transformant $U$ en $X$ de façon que $\varphi(x)=x$ pour $x\in X$. On a alors $f_n(X)\subset U$ pour les $n$ suffisamment grands. Il en résulte que la suite des fonctions $\{\varphi f_n\}$ converge uniformément vers $\varphi f_0=f_0$. A partir d'un $n$ suffisamment grand, on a donc

$$|\varphi f_n(x)-x|<\eta \qquad \text{pour tout} \quad x\in X,$$

d'où la conclusion q. f. d.

[1]) Cf. P. Alexandroff, Ann. of Math. **30** (1928), p. 103.
[2]) $\delta(Y)$ désigne le diamètre de $Y\subset X$.
[3]) K. Borsuk, Fund. Math. **19** (1932), p. 222.
[4]) S. Eilenberg, C. R. Paris **200** (1935), p. 1003.



Or, pour tout $X$ qui est un rétracte absolu de voisinage, il existe un nombre $\eta(X)>0$ tel que toute transformation continue $g(X)\subset X$ satisfaisant à la condition

$$|g(x)-x|<\eta(X) \qquad \text{pour tout} \quad x\in X$$

est homotope à la transformation $f_0(x)=x$ [5]). Il en résulte le

***Corollaire.*** *$X$ étant un rétracte absolu de voisinage, il existe un nombre $\varepsilon(X)>0$ tel que, étant donnée une transformation quelconque $f$ de $X$ à $\varepsilon(X)$-tranches, il existe une transformation continue $\varphi[f(X)]\subset X$ telle que $\varphi f$ est homotope à la transformation $f_0$ de $X$ en $X$ par l'identité.*

**2.** Considérons deux espaces métriques compacts $X$ et $Y$ et supposons l'existence de deux transformations continues $f(X)\subset Y$ et $\varphi(Y)\subset X$ telles que la transformation $\varphi f$ est homotope à la transformation $f_0$ de $X$ en $X$ par l'identité. Nous allons en déduire quelques conséquences concernant la structure combinatoire de $X$ et de $Y$.

Désignons par $z^i$ et $\zeta^i$ les cycles [6]) $i$-dimensionnels de $X$ et de $Y$ respectivement; par $B^i(X)$ et $B^i(Y)$ les groupes d'homologie correspondants. Dans $B^i(Y)$ nous distinguerons deux sous-groupes: le groupe $F^i$ de tous les cycles homologues aux cycles de la forme $f(z^i)$ et le groupe $O^i$ de tous les cycles $\zeta^i$ tels que $\varphi(\zeta^i)\sim 0$ (dans $X$).

La transformation $\varphi f$ étant homotope à $f_0$, on a

$$\text{(a)} \qquad \varphi f(z^i)\sim z^i \qquad \text{pour tout cycle} \quad z^i.$$

Par conséquent $f(z^i)\sim 0$ implique $z^i\sim 0$, c. à d.

(b) *$f$ transforme $B^i(X)$ en $F^i$ par isomorphie.*

Considérons une décomposition

$$(*) \qquad \zeta^i\sim\zeta_1^i+\zeta_2^i \qquad \text{où} \quad \zeta_1^i\in F^i \quad \text{et} \quad \zeta_2^i\in O^i;$$

il existe donc un $z_1^i$ tel que $f(z_1^i)\sim\zeta_1^i$. On a alors

$$\varphi(\zeta^i)\sim\varphi f(z_1^i)+\varphi(\zeta_2^i).$$

[5]) K. Borsuk, l. c., p. 224, **7**.
[6]) Les coefficients de $z^i$ et $\zeta^i$ peuvent être pris dans un groupe abelien quelconque.

Mais $\varphi(\zeta_2^i) \sim 0$, puisque $\zeta_2^i \epsilon O^i$, donc en vertu de (a) $\varphi(\zeta^i) \sim z_1^i$, ce qui donne $\zeta_1^i \sim f\varphi(\zeta^i)$ et $\zeta_2^i \sim \zeta^i - f\varphi(\zeta^i)$.

Il en résulte que la décomposition (*) est unique. Pour prouver qu'une telle décomposition existe, on n'a qu'à prouver que $\zeta^i - f\varphi(\zeta^i) \epsilon O^i$. Or, $\varphi(\zeta^i - f\varphi(\zeta^i)) \sim \varphi(\zeta^i) - \varphi f \varphi(\zeta^i) \sim \varphi(\zeta^i) - \varphi(\zeta^i) \sim 0$. Il est ainsi établi que

(c) $$B^i(Y) = F^i + O^i \text{ [7]}.$$

**3.** Supposons maintenant que $X = M$ et $Y = \mu$ sont deux multiplicités à $n$ dimensions.

Si $M$ est orientable, le $n$-ième nombre de Betti de $M$ (à coefficients entiers) est positif. En vertu de (b), il en est de même pour le $n$-ième groupe de Betti de $\mu$, c. à d. que $\mu$ est aussi orientable.

Si $M$ n'est pas orientable, il existe un coefficient de torsion en dimension $n-1$. En vertu de (b), il en est de même pour $\mu$, c. à d. que $\mu$ n'est orientable non plus. Par conséquent

(1) *$M$ et $\mu$ sont soit tous le deux orientables, soit tous le deux non-orientables.*

Dans le cas où ils sont orientables, nous parlerons dans la suite d'homologies mod $m = 0, 2, 3, \ldots$ Dans le cas contraire, nous nous bornerons aux homologies mod 2 seulement.

En vertu de (a), la transformation $\varphi f$ est de degré („Abbildungsgrad") 1. Il en resulte que degré $f$ = degré $\varphi = \pm 1$. En changeant au besoin l'orientation de $\mu$, on trouve donc que

(2) *Les transformations $f(M) = \mu$ et $\varphi(\mu) = M$ ont toutes les deux le degré 1.*

Désignons par $R(M)$ et $R(\mu)$ les anneaux d'homologie („Homologieringe") de $M$ et de $\mu$ respectivement. Il résulte[8] de (a) et de (2) que

(3) *La fonction $f$ transforme $R(M)$ en $R(\mu)$ par isomorphie (c. à. d. d'une façon biunivoque, additive et multiplicative). L'isomorphie inverse est réalisée par la fonction $\varphi$.*

---

[7]) c. à d. que $B^i(Y)$ est un produit direct de $F^i$ et $O^i$.

[8]) H. Hopf, Journ. f. reine u. angew. Math. **163** (1930), p. 82, Satz III b et p. 81, Satz II d. Les résultats de M. H. Hopf y sont établis seulement dans le cas de $M$ et $\mu$ orientables et pour les homologies à coefficients rationnels, mais il restent valables dans les cas considérés ici; cf. H. Freudenthal, Ann. of Math. **38** (1937), p. 847.



La transformation $\varphi f$ est une transformation du groupe fondamental $\pi_1(M)$ en lui même par l'identité. Il en résulte que $f$ transforme $\pi_1(M)$ en sous-groupe $f[\pi_1(M)]$ de $\pi_1(\mu)$ par isomorphie. Dans notre cas, où $M$ et $\mu$ sont orientables et la transformation $f$ est de degré 1, on sait[9]) que $f[\pi_1(M)] = \pi_1(\mu)$. Il en résulte que

(4) *Dans le cas de $M$ et $\mu$ orientables, la fonction $f$ transforme $\pi_1(M)$ en $\pi_1(\mu)$ par isomorphie, et $\varphi$ en est l'isomorphie inverse.*

**4.** MM. Kuratowski et Ulam[10]) ont defini, pour chaque couple d'espaces métriques $X$ et $Y$, un coefficient $\tau(X, Y)$, égal à la borne inférieure des nombres $\varepsilon$ pour lesquels il existe une transformations $f(X) = Y$ à $\varepsilon$-tranches. Ils ont posé le problème si deux multiplicités $M$ et $\mu$ pour lesquelles

$$\tau(M, \mu) + \tau(\mu, M) = 0$$

sont necéssairement homéomorphes. Nous avons prouvé ici *qu'il existe pour toute multiplicité $n$-dimensionnelle $M$ un nombre $\varepsilon(M) > 0$ tel que l'inégalité*

$$\tau(M, \mu) < \varepsilon(M)$$

*(où $\mu$ est une multiplicité à $n$ dimensions) implique l'existence de deux fonctions continues $f(M) = \mu$ et $\varphi(\mu) = M$ de degré* 1.

De plus, la superposition $\varphi f$ est homotope à la transformation de $M$ en $M$ par l'identité, ce qui implique les propositions (1)-(4).

Or, on ne connaît aucun exemple des deux multiplicités orientables à $n$ dimensions qui se laissaient transformer l'une en l'autre par une fonction de degré 1 et qui n'étaient pas homéomorphes[11]).

Notons enfin que le couple de transformations $f(X) \subset Y$ et $\varphi(Y) \subset X$, dont nous nous sommes occupé ici, n'était assujetti qu'à la condition que la superposition $\varphi f$ soit homotope à la transformation de $X$ en $X$ par l'identité. Si on ajoute une condition analogue pour $f\varphi$, on se trouve exactement dans le cas de deux espaces $X$ et $Y$ qui ont, selon M. W. Hurewicz[12]), le même *type d'homotopie*.

---

[9]) H. Hopf, Math. Ann. **102** (1929), p. 585 Satz VIII.

[10]) C. Kuratowski et S. Ulam, Fund. Math. **20** (1933), p. 244 et 252, cf. aussi H. Hopf, Enseignement Mathématique **35** (1936), pp. 334-347.

[11]) H. Hopf, ibid. p. 337.

[12]) W. Hurewicz, Proceed. Akad. Amsterdam **29** (1936), p. 124.