1) $2^{\aleph_0}=\aleph_1$. Dans ce cas, l'ensemble $f(E)$ est un C_3 d'après le théorème 1.

2) $2^{\aleph_0}>\aleph_1$. Comme on sait, chaque ensemble P_2 de puissance $>\aleph_1$ contient un ensemble parfait [1]). Il en résulte que l'on a dans ce cas $f(E)=\varphi(E)$. D'après le corollaire 1, l'ensemble $f(E)$ est donc un P_4.

Tout ensemble C_3 étant un P_4, nous avons ainsi démontré, *sans admettre l'hypothèse du continu*, ce

Théorème 2. *Si E est un ensemble plan P_2, l'ensemble $f(E)$ est un P_4* [2]).

Cependant nous ne savons pas démontrer sans l'hypothèse du continu que si E est un ensemble plan C_2, $f(E)$ est un ensemble projectif.

[1]) cf. C. Kuratowski, *Topologie I*, Monogr. Matem. 1933, p. 264, 2.

[2]) Nous ne savons pas si cette évaluation de classe projective de $f(E)$ est la meilleure (ce qui n'est pas le cas si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$).

Sur l'équivalence des problèmes de M. Kolmogoroff et M. Mazurkiewicz.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

Je ne vais considérer ici que des cas particuliers les plus simples des problèmes de M. Mazurkiewicz [1]) et M. Kolmogoroff [2]) et qu'on ne sait résoudre, même en admettant l'hypothèse du continu.

Problème M. *Existe-t-il un ensemble de nombres réels E, tel qu'il existe sur E une fonction de Baire de classe 3, mais qu'il n'en existe aucune de classe 4?*

Problème K. *Existe-t-il un corps dénombrable Φ d'ensembles* [3]), *tel que*

$$\Phi_{\sigma\delta\sigma}+\Phi_{\sigma\delta\sigma\delta}=\Phi_{\sigma\delta\sigma\delta\sigma}\ ? \tag{1}$$

Je vais démontrer (sans faire appel à l'hypothèse du continu) que *les problèmes* ***M*** *et* ***K*** *sont équivalents* [4]).

[1]) Voir G. Poprougénko, Fund. Math. **15**, p. 284 et p. 286.

[2]) Fund. Math. **25**, p. 578, Problème 65; cf. W. Sierpiński, Recueil Math. Moscou **1** (43) (1935), p. 303 et 305.

[3]) On appelle *corps d'ensembles* une famille Φ d'ensembles qui contient les ensembles E_1+E_2 et E_1-E_2 dès qu'elle contient E_1 et E_2. Au lieu des corps dénombrables, M. Kolmogoroff considère des familles Φ quelconques d'ensembles.

[4]) Il est facile de montrer que le problème ***M*** équivaut au problème ***M***** suivant:

Existe-t-il un ensemble de nombres réels E tel que: 1⁰ *tout sous-ensemble de E qui est un $G_{\delta\sigma\delta\sigma}$ relativement à E est un $G_{\delta\sigma\delta}$ rel. à E*, 2⁰ *il existe un sous-ensemble de E qui est un $G_{\delta\sigma\delta}$ rel. à E sans être un $G_{\delta\sigma}$ rel. à E.*

Or, je démontre dans cette Note que les problèmes ***M*** et ***M***** sont équivalents au problème ***K***, qui est un *problème de la Théorie générale des ensembles.*

1. Admettons que la réponse au problème $\boldsymbol{M}$ est positive et soit E un ensemble satisfaisant aux conditions de ce problème.

L'ensemble E est ponctiforme, puisque, sur tout ensemble linéaire contenant un intervalle, il existe — comme on sait — des fonctions de Baire de classe arbitraire. Or, tout ensemble linéaire ponctiforme est — comme on sait — homéomorphe à un ensemble de nombres irrationnels. D'autre part, on voit sans peine que tout ensemble linéaire qui est homéomorphe à un ensemble E satisfaisant au problème $\boldsymbol{M}$ satisfait également à ce problème. On peut donc supposer, sans restreindre la généralité de démonstration, que l'ensemble E est formé de nombres irrationnels.

Désignons par Φ la famille de toutes les sommes finies d'ensembles de la forme δE, où δ est un intervalle (ouvert) aux extrémités rationnelles. L'ensemble E ne contenant aucun nombre rationnel, on voit sans peine que la famille Φ est un corps dénombrable d'ensembles. Je dis qu'il vérifie la formule (1).

En effet, il est aisé de voir que la famille Φ_σ coïncide avec celle de tous les sous-ensembles de E qui sont ouverts relativement à E. Il en résulte que les familles $\Phi_{\sigma\delta\sigma}$, $\Phi_{\sigma\delta\sigma\delta}$ et $\Phi_{\sigma\delta\sigma\delta\sigma}$ coïncident respectivement avec celles de sous-ensembles de E qui sont des $G_{\delta\sigma}$, $G_{\delta\sigma\delta}$ et $G_{\delta\sigma\delta\sigma}$ relativement à E. Par conséquent, si l'on avait $\Phi_{\sigma\delta\sigma\delta} \neq \Phi_{\sigma\delta\sigma\delta\sigma}$, il existerait un sous-ensemble H de E qui est un $G_{\delta\sigma\delta\sigma}$ rel. à E sans être un $G_{\delta\sigma\delta}$ rel. à E; d'après les théorèmes connus sur les fonctions de Baire relatives à un ensemble donné, la fonction

$$f(p) = \begin{cases} 1 & \text{pour } p \in H \\ 0 & \text{pour } p \in E - H \end{cases}$$

serait donc de classe $\geqslant 4$ sur E, ce qui est impossible. On a donc

$$\Phi_{\sigma\delta\sigma\delta} = \Phi_{\sigma\delta\sigma\delta\sigma}. \tag{2}$$

D'autre part, si l'on avait $\Phi_{\sigma\delta\sigma\delta} = \Phi_{\sigma\delta\sigma}$, tout ensemble $G_{\delta\sigma\delta}$ rel. à E serait un $G_{\delta\sigma}$ rel. à E et il en résulterait — comme on sait — que toute fonction de Baire définie sur E est de classe $\leqslant 2$ sur E, contrairement à la propriété de l'ensemble E. On a ainsi

$$\Phi_{\sigma\delta\sigma\delta} \neq \Phi_{\sigma\delta\sigma}. \tag{3}$$

Les formules (2) et (3) entraînent (1). Le corps Φ répond donc au problème $\boldsymbol{K}$.

2. Admettons à présent qu'il existe un corps dénombrable d'ensembles $\Phi = (E_1, E_2, E_3, \ldots)$ satisfaisant à (1). Posons

$$S = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots$$

et désignons, pour $n = 1, 2, \ldots$, par $f_n(p)$ la fonction caractéristique de l'ensemble E_n, c. à d. définie par les conditions:

$$f_n(p) = \begin{cases} 1 & \text{pour } p \in E_n \\ 0 & \text{pour } p \in S - E_n. \end{cases}$$

Posons pour $p \in S$

$$f(p) = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot 3^{-n} f_n(p).$$

Je dis que l'ensemble $E = f(S)$ répond au problème $\boldsymbol{M}$.

En effet, soit pour les sous-ensembles X de E

$$\varphi(X) = \underset{p}{E}[p \in S, f(p) \in X].$$

La famille Φ étant un corps d'ensembles, on montre sans peine que pour qu'un sous-ensemble Q de E soit ouvert dans E, il faut et il suffit que l'ensemble $\varphi(Q)$ appartienne à la famille Φ_σ [1]). Il en résulte que pour qu'un sous-ensemble Q de E soit respectivement un $G_{\delta\sigma}$, un $G_{\delta\sigma\delta}$, un $G_{\delta\sigma\delta\sigma}$ rel. à E, il faut et il suffit que l'ensemble $\varphi(Q)$ appartienne respectivement à $\Phi_{\sigma\delta\sigma}$, à $\Phi_{\sigma\delta\sigma\delta}$, à $\Phi_{\sigma\delta\sigma\delta\sigma}$. La formule (1) entraîne donc que tout sous-ensemble de E qui est un $G_{\delta\sigma\delta\sigma}$ rel. à E est un $G_{\delta\sigma\delta}$ rel. à E et qu'il existe un sous-ensemble H de E qui est un $G_{\delta\sigma\delta}$ rel. à E, sans être un $G_{\delta\sigma}$ rel. à E. Il en résulte, comme on sait, que toute fonction de Baire définie sur E est de classe $\leqslant 3$ sur E et que la fonction caractéristique de l'ensemble H est de classe 3 sur E. L'ensemble E satisfait donc aux conditions du problème $\boldsymbol{M}$.

L'équivalence des problèmes $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{K}$ est ainsi établie.

[1]) Pour le démontrer, il suffit de répéter, avec des modifications évidentes, mes démonstrations des lemmes I et II, Fund. Math. **29**, p. 184-186.