D'après (1), on trouve sans peine $\varphi(Q) \subset Q$, donc $\varphi(Q) \cdot (X-Q)=0$ et, $\varphi(x)$ étant une fonction de Baire à valeurs distinctes et Q un ensemble projectif, les formules (2) montrent que $f(x)$ est une fonction de variable réelle à valeurs distinctes dont l'image géométrique est un ensemble projectif [1]).

Reste à prouver que $f(X)=E$. Or, la formule évidente $\varphi(Q) \subset P \subset E$ entraîne $H \cdot \varphi(Q)=0$ et comme $H+\varphi(Q)=Q$ selon (1), on en conclut que $H=Q-\varphi(Q)$. Il en résulte que $E=CH=\varphi(Q)+X-Q$, d'où $f(X)=E$, puisque $f(X)=f(Q)+f(X-Q)=\varphi(Q)+X-Q$ d'après (2).

Le théorème étant ainsi établi, on en conclut que

1) *pour les ensembles analytiques, le problème posé admet toujours une réponse positive* (puisque chaque ensemble analytique indénombrable contient un ensemble parfait);

2) *pour les complémentaires analytiques (et, plus généralement, pour les ensembles PCA), la réponse négative au problème impliquerait l'hypothèse du continu*; en effet, en admettant que l'hypothèse du continu est fausse, chaque ensemble *PCA* de puissance $2^{\aleph_0}$ contient un ensemble parfait [2]).

[1]) Cf. p. ex. C. Kuratowski, *Topologie I*, Monogr. Matem., Warszawa 1933, p. 239.

[2]) Ibid. p. 264 (théorème: chaque ensemble *PCA* de puissance $>\aleph_1$ contient un ensemble parfait).

Sur un problème concernant les ensembles projectifs.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

E étant un ensemble plan, désignons par $f(E)$ l'ensemble de tous les nombres réels a tels que la droite $x=a$ rencontre E en un ensemble de points de puissance du continu.

Dans cette Note, je m'occupe du problème suivant:

E étant un ensemble plan projectif, l'ensemble (linéaire) $f(E)$ est-il également projectif?

Dans l'état actuel des mathématiques, nous ne savons résoudre (affirmativement) ce problème qu'en admettant l'hypothèse du continu. Nous savons le résoudre sans cette hypothèse seulement pour les ensembles E qui sont des P_2 (c. à d. des projections des complémentaires analytiques) [1]).

E étant un ensemble plan, désignons respectivement par $\varphi(E)$ et par $\psi(E)$ l'ensemble de tous les nombres réels a tels que la droite $x=a$ rencontre E en un ensemble de points qui contient un ensemble parfait et en un ensemble indénombrable.

Lemme 1. *E étant un ensemble plan C_n, l'ensemble $\varphi(E)$ est un P_{n+1}.*

Démonstration. En se servant des opérateurs logiques $\sum\limits_x$ (ce qui veut dire „il existe un x tel que") et $\prod\limits_x$ (ce qui signifie „quel que soit x"), la démonstration du lemme résulte directement de la

[1]) Pour les ensembles E analytiques (c. à d. P_1) les ensembles $f(E)$ sont également analytiques: voir S. Mazurkiewicz et W. Sierpiński, Fund. Math. **6**, p. 160; aussi C. Kuratowski, Fund. Math. **17**, p. 262.

définition de l'opération φ. En effet, la variable P parcourant l'espace des ensembles parfaits, qui est — comme on sait[1]) — séparable et complet, on a

$$\varphi(E)=\underset{x}{E}\sum_{P}\prod_{y}[(y\in P)\to(xy\in E)]=\sum_{P}\prod_{y}\underset{xyP}{E}[(y\in P)\to(xy\in E)].$$

L'ensemble $\underset{xyP}{E}[(y\in P)\to(xy\in E)]$ étant un C_n, $\varphi(E)$ est de classe $PCPCC_n=P_{n+1}$ [2]).

En voici une autre démonstration qui n'est qu'une modification d'un raisonnement de M. Lusin[3]).

Soit E un ensemble C_n situé dans le plan XOY. Il existe — comme on sait — un ensemble U mesurable B situé dans le plan YOZ et tel qu'en le coupant par les droites parallèles à l'axe OY, on obtient tous les ensembles linéaires parfaits et seulement des tels ensembles. Désignons par S (resp. par T) l'ensemble de tous les points de l'espace à 3 dimensions $OXYZ$ dont les projections orthogonales sur le plan XOY (resp. YOZ) appartiennent à E (resp. à U). L'ensemble S est — comme on sait — un C_n et l'ensemble T est mesurable B. L'ensemble $T-S$ est donc un P_n.

Soit H la projection de $T-S$ sur le plan XOZ et R le complémentaire de H par rapport au plan XOZ; soit enfin M la projection de R sur l'axe OX. L'ensemble M est évidemment un P_{n+1}. Or, on voit sans peine que $\varphi(E)=M$. Le lemme 1 est ainsi démontré.

Tout P_n étant — comme on sait — un C_{n+1}, il résulte du lemme 1 ce

Corollaire 1. *E étant un ensemble plan P_n, l'ensemble $\varphi(E)$ est un P_{n+2}* [4]).

Lemme 2. *E étant un ensemble plan P_n, l'ensemble $\psi(E)$ est un C_{n+1}* [4]).

---

[1]) Théorème de M. Banach. Voir C. Kuratowski, Fund. Math. **17** (1931), p. 260. L'ensemble E est supposé borné (ce qui est évidemment légitime).

[2]) Ibid. p. 252.

[3]) Fund. Math. **10**, p. 91—92.

[4]) Pour $n=1$ cette évaluation de classe projective de l'ensemble $\varphi(E)$ n'est pas la meilleure, vu la note [1]), p. 61, et l'identité $\varphi(E)=\psi(E)=f(E)$, valable pour tout E analytique.

Démonstration. En effet, en désignant par $\mathfrak{z}=[\mathfrak{z}^{(1)},\mathfrak{z}^{(2)},\ldots]$ un point de l'espace de Fréchet, c. à d. une suite variable de nombres réels, il vient

$$\psi(E)=\underset{x}{E}\prod_{\mathfrak{z}}\sum_{y}\prod_{m}(y\neq\mathfrak{z}^{(m)})(xy\in E)=\prod_{\mathfrak{z}}\sum_{y}\prod_{m}\underset{xy\mathfrak{z}}{E}(y\neq\mathfrak{z}^{(m)})(xy\in E).$$

L'ensemble $\underset{xy\mathfrak{z}}{E}(y\neq\mathfrak{z}^{(m)})(xy\in E)$ étant un P_n (pour m fixe), $\psi(E)$ est de classe $CPCPP_n=C_{n+1}$.

On peut aussi, comme dans le cas du lemme 1, démontrer ce lemme de la façon suivante.

Soit E un ensemble P_n situé dans le plan XOY. Il existe — comme on sait — un ensemble V mesurable B situé dans le plan YOZ et tel qu'en le coupant par les droites parallèles à l'axe OY, on obtient tous les ensembles linéaires au plus dénombrables et seulement des tels ensembles. Désignons par S (resp. par Q) l'ensemble de tous les points de l'espace à 3 dimensions $OXYZ$ dont les projections sur le plan XOY (resp. YOZ) appartiennent à E (resp. à V). L'ensemble S est un P_n et l'ensemble Q est mesurable B. L'ensemble $S-Q$ est donc un P_n. Soit K la projection de $S-Q$ sur le plan XOZ et L le complémentaire de K par rapport au plan XOZ; soit ensuite N la projection de L sur l'axe OX et, enfin, W le complémentaire de N par rapport à l'axe OX. On voit sans peine que l'ensemble W est un C_{n+1} et que l'on a $\psi(E)=W$. Le lemme 2 est ainsi démontré.

Tout ensemble C_n étant un P_{n+1}, il résulte du lemme 2 ce

Corollaire 2. *E étant un ensemble plan C_n, l'ensemble $\psi(E)$ est un P_{n+2}.*

Si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, on a évidemment $f(E)=\psi(E)$, donc, en vertu du lemme 2, ce

Théorème 1. *Si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, alors, E étant un ensemble plan P_n, l'ensemble $f(E)$ est un C_{n+1}.*

Soit maintenant E un ensemble P_2 plan. Distinguons deux cas possibles:

1) $2^{\aleph_0}=\aleph_1$. Dans ce cas, l'ensemble $f(E)$ est un C_3 d'après le théorème 1.

2) $2^{\aleph_0}>\aleph_1$. Comme on sait, chaque ensemble P_2 de puissance $>\aleph_1$ contient un ensemble parfait [1]). Il en résulte que l'on a dans ce cas $f(E)=\varphi(E)$. D'après le corollaire 1, l'ensemble $f(E)$ est donc un P_4.

Tout ensemble C_3 étant un P_4, nous avons ainsi démontré, *sans admettre l'hypothèse du continu*, ce

Théorème 2. *Si E est un ensemble plan P_2, l'ensemble $f(E)$ est un P_4* [2]).

Cependant nous ne savons pas démontrer sans l'hypothèse du continu que si E est un ensemble plan C_2, $f(E)$ est un ensemble projectif.

---

[1]) cf. C. Kuratowski, *Topologie I*, Monogr. Matem. 1933, p. 264, 2.

[2]) Nous ne savons pas si cette évaluation de classe projective de $f(E)$ est la meilleure (ce qui n'est pas le cas si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$).

Sur l'équivalence des problèmes de M. Kolmogoroff et M. Mazurkiewicz.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

Je ne vais considérer ici que des cas particuliers les plus simples des problèmes de M. Mazurkiewicz [1]) et M. Kolmogoroff [2]) et qu'on ne sait résoudre, même en admettant l'hypothèse du continu.

Problème M. *Existe-t-il un ensemble de nombres réels E, tel qu'il existe sur E une fonction de Baire de classe 3, mais qu'il n'en existe aucune de classe 4?*

Problème K. *Existe-t-il un corps dénombrable Φ d'ensembles* [3]), *tel que*

$$\Phi_{\sigma\delta\sigma}+\Phi_{\sigma\delta\sigma\delta}=\Phi_{\sigma\delta\sigma\delta\sigma}\ ? \tag{1}$$

Je vais démontrer (sans faire appel à l'hypothèse du continu) que *les problèmes **M** et **K** sont équivalents* [4]).

---

[1]) Voir G. Poprougénko, Fund. Math. **15**, p. 284 et p. 286.

[2]) Fund. Math. **25**, p. 578, Problème 65; cf. W. Sierpiński, Recueil Math. Moscou **1** (43) (1935), p. 303 et 305.

[3]) On appelle *corps d'ensembles* une famille Φ d'ensembles qui contient les ensembles E_1+E_2 et E_1-E_2 dès qu'elle contient E_1 et E_2. Au lieu des corps dénombrables, M. Kolmogoroff considère des familles Φ quelconques d'ensembles.

[4]) Il est facile de montrer que le problème ***M*** équivaut au problème ***M****** suivant:

Existe-t-il un ensemble de nombres réels E tel que: 1° *tout sous-ensemble de E qui est un $G_{\delta\sigma\delta\sigma}$ relativement à E est un $G_{\delta\sigma\delta}$ rel. à E*, 2° *il existe un sous-ensemble de E qui est un $G_{\delta\sigma\delta}$ rel. à E sans être un $G_{\delta\sigma}$ rel. à E.*

Or, je démontre dans cette Note que les problèmes ***M*** et ***M****** sont équivalents au problème ***K***, qui est un *problème de la Théorie générale des ensembles.*