Quant à la propriété (C), il est à remarquer que la propriété topologique (P) suivante entraîne la propriété (C) et même la propriété (C') de M. Rothberger[1]):

Nous dirons qu'un ensemble linéaire E jouit de la *propriété* (P) s'il existe un sous-ensemble dénombrable D de E tel que, pour tout ensemble Q ouvert dans E et contenant D, l'ensemble $E-Q$ est au plus dénombrable[2]).

Nous ne savons pas (même à l'aide de l'hypothèse du continu) résoudre la question si la propriété (P) est équivalente à la propriété (C). Si c'était le cas, la réponse au problème $\boldsymbol{P}_1$ (donc aussi au problème $\boldsymbol{P}_2$) serait affirmative. Or, comme on voit sans peine, la propriété (P) est incompatible avec la propriété λ [3]). Donc, si les propriétés (P) et (C) sont équivalentes, il n'existe aucun ensemble linéaire jouissant à la fois des propriétés (C) et λ; alors, on pourrait en tirer (à l'aide de l'hypothèse du continu) qu'une somme d'un ensemble linéaire à propriété λ et d'un ensemble dénombrable jouit encore de cette propriété. Aussi, le problème s'il en est toujours ainsi reste ouvert.

1) Voir Fund. Math. **30**, p. 50.

2) Cf. A. S. Besicovitch, Acta Math. **62** (1934), p. 289.

3) On dit qu'un ensemble (métrique) E jouit de la propriété λ, lorsque chaque sous-ensemble dénombrable de E est un G_δ relativement à E. Voir C. Kuratowski, Fund. Math. **21**, p. 127.

Sur un problème concernant les fonctions projectives.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

Appelons *projective* toute fonction d'une variable réelle $f(x)$ dont l'image géométrique est un ensemble projectif (ou bien — ce qui revient au même — telle que l'ensemble $\underset{x}{E}[f(x)>c]$ est un ensemble projectif, quel que soit le nombre réel c).

M. C. Kuratowski a attiré l'attention sur l'intérêt d'étudier la question si, *étant donné un ensemble projectif E de puissance du continu, il existe une fonction projective établissant une correspondance biunivoque entre l'ensemble X de tous les nombres réels et l'ensemble E* [1]).

Je vais démontrer que *la réponse est positive dans l'hypothèse supplémentaire que E contient un ensemble P parfait.*

Soit, en effet, $\varphi(x)$ une fonction de Baire (de classe 1) à valeurs distinctes et telle que $\varphi(X)=P$. Posons $H=X-E$ et

$$Q=H+\varphi(H)+\varphi\varphi(H)+\varphi\varphi\varphi(H)+\dots \tag{1}$$

Soit $f(x)$ la fonction d'une variable réelle définie comme il suit:

$$f(x)=\begin{cases}\varphi(x) & \text{pour } x\,\epsilon\, Q\\ x & \text{pour } x\,\epsilon\, X-Q.\end{cases} \tag{2}$$

1) Il est à remarquer que, si E est un ensemble *borelien* de puissance du continu, il existe une *fonction de Baire* (une homéomorphie généralisée) qui établit la correspondance en question. Voir N. Lusin, *Ensembles analytiques*, Chap. II, C. Kuratowski, Fund. Math. 22 (1934), p. 216 et F. Hausdorff, Fund. Math. 29 (1937), p. 151.

D'après (1), on trouve sans peine $\varphi(Q) \subset Q$, donc $\varphi(Q)\cdot(X-Q)=0$ et, $\varphi(x)$ étant une fonction de Baire à valeurs distinctes et Q un ensemble projectif, les formules (2) montrent que $f(x)$ est une fonction de variable réelle à valeurs distinctes dont l'image géométrique est un ensemble projectif [1]).

Reste à prouver que $f(X)=E$. Or, la formule évidente $\varphi(Q)\subset P\subset E$ entraîne $H\cdot\varphi(Q)=0$ et comme $H+\varphi(Q)=Q$ selon (1), on en conclut que $H=Q-\varphi(Q)$. Il en résulte que $E=CH=\varphi(Q)+X-Q$, d'où $f(X)=E$, puisque $f(X)=f(Q)+f(X-Q)=\varphi(Q)+X-Q$ d'après (2).

Le théorème étant ainsi établi, on en conclut que

1) *pour les ensembles analytiques, le problème posé admet toujours une réponse positive* (puisque chaque ensemble analytique indénombrable contient un ensemble parfait);

2) *pour les complémentaires analytiques (et, plus généralement, pour les ensembles PCA), la réponse négative au problème impliquerait l'hypothèse du continu*; en effet, en admettant que l'hypothèse du continu est fausse, chaque ensemble PCA de puissance $2^{\aleph_0}$ contient un ensemble parfait [2]).

[1]) Cf. p. ex. C. Kuratowski, *Topologie I*, Monogr. Matem., Warszawa 1933, p. 239.

[2]) Ibid. p. 264 (théorème: chaque ensemble PCA de puissance $>\aleph_1$ contient un ensemble parfait).

Sur un problème concernant les ensembles projectifs.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

E étant un ensemble plan, désignons par $f(E)$ l'ensemble de tous les nombres réels a tels que la droite $x=a$ rencontre E en un ensemble de points de puissance du continu.

Dans cette Note, je m'occupe du problème suivant:

E étant un ensemble plan projectif, l'ensemble (linéaire) $f(E)$ est-il également projectif?

Dans l'état actuel des mathématiques, nous ne savons résoudre (affirmativement) ce problème qu'en admettant l'hypothèse du continu. Nous savons le résoudre sans cette hypothèse seulement pour les ensembles E qui sont des P_2 (c. à d. des projections des complémentaires analytiques) [1]).

E étant un ensemble plan, désignons respectivement par $\varphi(E)$ et par $\psi(E)$ l'ensemble de tous les nombres réels a tels que la droite $x=a$ rencontre E en un ensemble de points qui contient un ensemble parfait et en un ensemble indénombrable.

Lemme 1. *E étant un ensemble plan C_n, l'ensemble $\varphi(E)$ est un P_{n+1}.*

Démonstration. En se servant des opérateurs logiques $\sum\limits_x$ (ce qui veut dire „il existe un x tel que") et $\prod\limits_x$ (ce qui signifie „quel que soit x"), la démonstration du lemme résulte directement de la

[1]) Pour les ensembles E analytiques (c. à d. P_1) les ensembles $f(E)$ sont également analytiques: voir S. Mazurkiewicz et W. Sierpiński, Fund. Math. **6**, p. 160; aussi C. Kuratowski, Fund. Math. **17**, p. 262.