Sur un problème de M. Hausdorff.

Par

W. Sierpiński (Warszawa).

M. F. Hausdorff a posé le problème suivant [1]: E étant un ensemble de puissance $\aleph_1$, existe-t-il une famille dénombrable Φ de sous-ensembles de E, telle que tout sous-ensemble de E est de la forme $\overline{\lim_{n=\infty}} E_n = (E_1 + E_2 + E_3 + \ldots)(E_2 + E_3 + \ldots)(E_3 + \ldots)\ldots$, où $E_n (n=1,2,3,\ldots)$ sont des ensembles de la famille Φ? [2]).

Le but de cette Note est de démontrer que le problème de M. Hausdorff équivaut à chacun des trois autres problèmes. Je vais notamment démontrer ce

Théorème. *Les propositions suivantes* P_1, P_2, P_3 *et* P_4 *sont équivalentes*:

P_1. *E étant un ensemble de puissance $\aleph_1$, il existe une famille dénombrable Φ de sous-ensembles de E, telle que tout sous-ensemble de E est de la forme* $\lim_{n=\infty} E_n$ [3]) *où* $E_n \in \Phi$ *pour* $n=1,2,3,\ldots$

P_2. *E étant un ensemble de puissance $\aleph_1$, il existe une famille dénombrable Φ de sous-ensembles de E, telle que tout sous-ensemble de E est de la forme* $\overline{\lim_{n=\infty}} E_n$, *où* $E_n \in \Phi$ *pour* $n=1,2,3,\ldots$ [4]).

---

[1]) *Fund. Math.* **20**, p. 286, Problème 58.

[2]) Si la réponse à ce problème est positive, on a, comme on voit sans peine, $2^{\aleph_1} = 2^{\aleph_0}$: elle est donc négative, si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

[3]) La formule $H = \lim_{n=\infty} E_n$ exprime qu'on a (à la fois) les formules:

$$H = (E_1 + E_2 + E_3 + \ldots)(E_2 + E_3 + \ldots)(E_3 + \ldots)\ldots$$

et

$$H = E_1 E_2 E_3 \ldots + E_2 E_3 E_4 \ldots + E_3 E_4 E_5 \ldots + \ldots$$

[4]) Il résulte de l'équivalence des propositions P_1 et P_2 que l'on peut remplacer dans le problème de M. Hausdorff $\overline{\lim_{n=\infty}} E_n$ par $\lim_{n=\infty} E_n$.

P_3. *E étant un ensemble de puissance $\aleph_1$, il existe une famille dénombrable Φ de sous-ensembles de E, telle que tout sous-ensemble de E appartient à la famille $\Phi_{\sigma\delta}$* [1]).

P_4. *Il existe un ensemble linéaire indénombrable N dont tout sous-ensemble est un F_σ relativement à N* [2]).

Démonstration. Les implications $P_1 \to P_2 \to P_3$ étant évidentes, il suffit de montrer que $P_3 \to P_4 \to P_1$.

Admettons donc la proposition P_3. Soient: E un ensemble de puissance $\aleph_1$ et $\Phi = (E_1, E_2, E_3, \ldots)$ une famille (dénombrable de sous-ensembles de E) satisfaisant aux conditions de la proposition P_3. On voit sans peine que

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots \tag{1}$$

Je vais montrer d'abord que tout ensemble (p) formé d'un seul élément p de E appartient à la famille Φ_δ (c. à d. est de la forme $H_1 H_2 H_3 \ldots$, où $H_n \epsilon \Phi$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$). En effet, en tant que sous-ensemble de E, l'ensemble (p) appartient par hypothèse à la famille $\Phi_{\sigma\delta}$. En développant le produit $\prod\limits_{m=1}^{\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} H_{m,n}$ en une série de $2^{\aleph_0}$ produits, on voit sans peine que tout ensemble de la famille $\Phi_{\sigma\delta}$, donc en particulier l'ensemble (p), est une somme de $2^{\aleph_0}$ ensembles de la famille Φ_δ. L'ensemble (p) n'admettant qu'un seul élément est donc égal à un terme de cette somme et appartient par conséquent à la famille Φ_δ.

Ceci établi, désignons pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ par $f_n(p)$ la fonction définie par les conditions:

$$f_n(p) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad p \epsilon E_n \\ 0 & \text{pour} \quad p \epsilon E - E_n \end{cases} \tag{2}$$

et posons

$$f(p) = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot 3^{-n} f_n(p) \qquad \text{pour} \quad p \epsilon E. \tag{3}$$

---

[1]) c.à d. est de la forme $\prod\limits_{m=1}^{\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} E_{m,n}$ où $E_{m,n} \epsilon \Phi$ pour m et n naturels.

[2]) Le problème si la proposition P_4 est vraie a été posé par moi dans mon livre *Hypothèse du continu*, Monografie Matematyczne IV, Warszawa-Lwów 1934, p. 90.

Je dis que la fonction (3) transforme d'une façon biunivoque l'ensemble E en ensemble linéaire $N = f(E)$. Soient, en effet, p_1 et p_2 deux éléments distincts de l'ensemble E. Comme nous avons montré, on a $(p_1) \epsilon \Phi_\delta$ et comme $\Phi = (E_1, E_2, E_3, \ldots)$, il existe une suite infinie $k_1, k_2, k_3, \ldots$ de nombres naturels, telle que $(p_1) = \prod\limits_{n=1}^{\infty} E_{k_n}$. On a donc $p_1 \epsilon E_{k_n}$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ Si l'on avait aussi $p_2 \epsilon E_{k_n}$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, on aurait $p_2 \epsilon \prod\limits_{n=1}^{\infty} E_{k_n} = (p_1)$, donc $p_2 = p_1$, contrairement à l'hypothèse. Il existe donc un nombre naturel s pour lequel $p_1 \epsilon E_{k_s}$ et $p_2 \operatorname{non} \epsilon E_{k_s}$, d'où en vertu de (2) $f_{k_s}(p_1) = 1$ et $f_{k_s}(p_2) = 0$, donc selon (3)

$$f(p_1) \neq f(p_2).$$

La biunivocité de la fonction (3) étant ainsi établie, l'ensemble $N = f(E)$ est de même puissance que E; il est donc indénombrable.

Je vais prouver maintenant que la fonction (3) transforme les ensembles de la famille Φ_σ en sous-ensembles de N ouverts dans N [1]). Soit, en effet, $\varphi(x)$ la fonction inverse de la fonction $f(p)$, donc définie pour $x \epsilon N$: elle transforme d'une façon biunivoque l'ensemble N en ensemble E. Si $H \epsilon \Phi_\sigma$, il existe une suite infinie de nombres naturels $m_1, m_2, m_3, \ldots$, telle que

$$H = E_{m_1} + E_{m_2} + E_{m_3} + \ldots,$$

d'où

$$f(H) = f(E_{m_1}) + f(E_{m_2}) + f(E_{m_3}) + \ldots$$

La somme d'ensembles ouverts dans N étant toujours un ensemble ouvert dans N, il suffit de montrer que, pour tout m naturel, l'ensemble $f(E_m)$ est ouvert dans N.

Soit $x_0 \epsilon f(E_m)$. On a donc $p_0 = \varphi(x_0) \epsilon E_m$, d'où $f_m(p_0) = 1$. En vertu de (3) et des propriétés connues des fractions ternaires, il existe par conséquent un intervalle δ entourant x_0 et tel que, pour $x = f(p) \epsilon \delta N$, on a $f_m(p) = f_m(p_0) = 1$, donc $p \epsilon E_m$ et $x = f(p) \epsilon f(E_m)$, ce qui prouve que l'ensemble $f(E_m)$ est ouvert dans N.

Il est ainsi établi que la fonction (3) transforme tout ensemble de la famille Φ_σ en un sous-ensemble de N ouvert dans N; il en résulte tout de suite qu'elle transforme les ensembles de la famille $\Phi_{\sigma\delta}$ en sous-ensembles de N qui sont des G_δ relativement à N.

---

[1]) Cf. ma démonstration dans Fund. Math. **29**, p. 186, lemme II.

Considérons à présent un sous-ensemble quelconque N_1 de N. Vu la propriété de l'ensemble E, on a $E-\varphi(N_1)\epsilon\Phi_{\sigma\delta}$, de sorte que l'ensemble $f(E-\varphi(N_1))$ est un G_δ relativement à N et l'ensemble $N-f(E-\varphi(N_1))=N-[f(E)-f(\varphi(N_1))]=N-(N-N_1)=N_1$ est un F_σ relativement à N. L'ensemble linéaire N satisfait donc aux conditions de la proposition $\boldsymbol{P}_4$.

L'implication $\boldsymbol{P}_3\rightarrow\boldsymbol{P}_4$ est ainsi établie.

Pour établir l'implication $\boldsymbol{P}_4\rightarrow\boldsymbol{P}_1$, nous démontrerons d'abord deux lemmes qui peuvent présenter quelque intérêt par eux mêmes.

Lemme I. *E étant un ensemble linéaire quelconque et M et N deux sous-ensembles disjoints de E qui sont des F_σ relativement à E, il existe toujours deux ensembles F_σ linéaires disjoints P et Q, tels que $M=EP$ et $N=EQ$.*

Démonstration. M et N étant deux sous-ensembles de E qui sont des F_σ relativement à E, il existe deux ensembles F_σ linéaires S et T, tels que $M=ES$ et $N=ET$; nous pouvons poser:

$$S=S_1+S_2+S_3+\ldots,\qquad T=T_1+T_2+T_3+\ldots,\tag{4}$$

où S_n et T_n $(n=1,2,3,\ldots)$ sont des ensembles fermés et

$$S_1\subset S_2\subset S_3\subset\ldots,\qquad T_1\subset T_2\subset T_3\subset\ldots\tag{5}$$

Posons encore:

$$P=\sum_{n=1}^{\infty}(S_n-T_n),\qquad Q=\sum_{n=1}^{\infty}(T_n-S_n).\tag{6}$$

Ce sont, comme on voit sans peine, des F_σ. Je dis qu'ils satisfont aux conditions du lemme.

Soient k et l deux nombres naturels. Si $k\leqslant l$, on a d'après (5) $S_k-T_k\subset S_k\subset S_l$, donc $(S_k-T_k)(T_l-S_l)=0$. Si $k>l$, on a d'après (5) $T_l-S_l\subset T_l\subset T_k$, donc encore $(S_k-T_k)(T_l-S_l)=0$.

Chaque terme de la série P (formule (6)) est donc disjoint de chaque terme de la série Q; par conséquent $PQ=0$.

D'après (4) on a, pour n naturels

$$ES_nT_n\subset EST=ES\cdot ET=M\cdot N=0,$$

donc $ES_nT_n=0$ pour $n=1,2,3,\ldots$, d'où selon (6) et (4)

$$EP=E\sum_{n=1}^{\infty}(S_n-T_n)=E\sum_{n=1}^{\infty}(S_n-ES_nT_n)=E\sum_{n=1}^{\infty}S_n=ES=M.$$

Pareillement, $EQ=ET=N$. Les ensembles P et Q satisfont donc à la thèse du lemme, qui est ainsi démontré.

Comme on voit sans peine, on peut remplacer dans le lemme I les F_σ par des ensembles mesurables B d'une classe additive quelconque. Or, d'après une remarque de M[lle] Braun, pour qu'on puisse remplacer dans le lemme I les F_σ par les ensembles d'un noyau quelconque R d'ensembles, il faut et il suffit que, E_1 et E_2 étant deux ensembles quelconques de R, il existe toujours deux ensembles disjoints H_1 et H_2 de R, tels que $E_1-E_2\subset H_1$ et $E_2-E_1\subset H_2$. Vu les résultats de MM. Lusin et Novikoff concernant la séparabilité des ensembles analytiques et de leurs complémentaires, il en résulte qu'on peut remplacer dans le lemme I les F_σ par des ensembles $C(A)$ et aussi par des ensembles $PC(A)$, et qu'on ne peut pas y remplacer les F_σ par des ensembles (A).

Lemme II. *E étant un ensemble (infini) linéaire quelconque, il existe une famille dénombrable Φ de sous-ensembles de E, telle que tout sous-ensemble H de E qui est à la fois un F_σ et un G_δ relativement à E est de la forme $H=\lim\limits_{n=\infty}E_n$ où $E_n\epsilon\Phi$ pour $n=1,2,3,\ldots$*

Démonstration. Soit Γ la famille de tous les ensembles linéaires qui sont des sommes d'un nombre fini d'intervalles (fermés) aux extrémités rationnelles. La famille Γ est, comme on sait, dénombrable. Désignons par Φ la famille de tous les ensembles de la forme HE où $H\epsilon\Gamma$. C'est une famille dénombrable de sous-ensembles de E. Je dis qu'elle satisfait à la thèse du lemme II.

Soit, en effet, H un sous-ensemble de E qui est à la fois un F_σ et un G_δ relativement à E. Les ensembles H et $E-H$ sont donc des F_σ relativement à E et, d'après le lemme I, il existe deux F_σ linéaires disjoints, P et Q, tels que $H=EP$ et $E-H=EQ$. Les ensembles P et Q étant des F_σ linéaires, il existe deux suites infinies d'ensembles linéaires, fermés et bornés P_n $(n=1,2,3,\ldots)$ et Q_n $(n=1,2,3,\ldots)$, telles que:

$$P=P_1+P_2+P_3+\ldots,\qquad Q=Q_1+Q_2+Q_3+\ldots\tag{7}$$

Soit n un nombre naturel donné. Les ensembles:

$$P_1+P_2+\ldots+P_n,\qquad Q_1+Q_2+\ldots+Q_n$$

sont fermés, bornés et disjoints: leur distance δ est donc positive. Divisons la droite en intervalles (fermés) $\langle k/m,(k+1)/m\rangle$ où $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$ et m est un nombre naturel $>1/\delta$. Soit S_n la somme de tous ceux qui contiennent des points de l'ensemble $P_1+P_2+\ldots+P_n$. Vu la définition de δ, ils ne contiennent donc pas de points de l'ensemble $Q_1+Q_2+\ldots+Q_n$. On a par conséquent:

(8) $$P_1+P_2+\ldots+P_n\subset S_n,$$

(9) $$S_n(Q_1+Q_2+\ldots+Q_n)=0$$

et $S_n\epsilon\Gamma$ (puisque l'ensemble $P_1+P_2+\ldots+P_n$ est borné). Les ensembles

(10) $$E_n=ES_n, \quad \text{où} \quad n=1,2,3,\ldots,$$

appartiennent évidemment à la famille Φ.

Si $p\epsilon H$, on a selon $H=EP$ et (7) pour n suffisamment grands (soit pour $n>\mu$) $p\epsilon P_1+P_2+\ldots+P_n$, donc en vertu de (8) et (10) $p\epsilon ES_n=E_n$, d'où $p\epsilon \underline{\lim}_{n=\infty} E_n$. On a ainsi

(11) $$H\subset \underline{\lim}_{n=\infty} E_n.$$

Si $p\epsilon E-H$, on a selon $E-H=EQ$ et (7), pour n suffisamment grands (soit pour $n>\nu$), $p\epsilon Q_1+Q_2+\ldots+Q_n$, donc en vertu de (9) et (10) p non $\epsilon ES_n=E_n$, d'où p non $\epsilon \overline{\lim}_{n=\infty} E_n$. Ainsi $p\epsilon \overline{\lim}_{n=\infty} E_n$ entraîne p non $\epsilon E-H$, d'où (vu que $E_n\subset E$ pour $n=1,2,3,\ldots$) $p\epsilon H$. On a ainsi

(12) $$\overline{\lim_{n=\infty}} E_n\subset H.$$

Les formules (11) et (12) donnent $H=\lim_{n=\infty} E_n$ (car on a toujours $\underline{\lim}_{n=\infty} E_n\subset \overline{\lim}_{n=\infty} E_n$), ce qui achève la démonstration du lemme II.

Admettons maintenant la propositions $\boldsymbol{P_4}$. Soit N un ensemble linéaire indénombrable dont tout sous-ensemble est un F_σ relativement à N. Cette propriété de N étant héréditaire (c. à d. appartenant à tout sous-ensemble de N dès qu'elle appartient à N), nous pouvons supposer que l'ensemble N est de puissance $\aleph_1$. D'après le lemme II, il existe une famille dénombrable Φ_0 de sous-ensembles de N, telle que tout sous-ensemble H de N (qui, d'après la propriété de N, est, en même temps que $N-H$, un F_σ relativement à N, donc à la fois un F_σ et un G_δ relativement à N) est de la forme $H=\lim_{n=\infty} E_n$ où $E_n\epsilon\Phi_0$ pour $n=1,2,3,\ldots$

Soit maintenant E un ensemble quelconque de puissance $\aleph_1$. Il existe donc une transformation biunivoque f de l'ensemble N en ensemble $E=f(N)$; soit φ la transformation inverse, de E en $N=\varphi(E)$. Soit enfin Φ la famille (dénombrable) de tous les ensembles $f(M)$ où $M\epsilon\Phi_0$.

Considérons un sous-ensemble quelconque Q de E. On a donc $\varphi(Q)\subset N$ et, d'après la propriété démontrée de l'ensemble N, $\varphi(Q)=\lim_{n=\infty} E_n$ où $E_n\epsilon\Phi_0$ pour $n=1,2,3,\ldots$, d'où $H_n=f(E_n)\epsilon\Phi$ pour $n=1,2,3,\ldots$ La transformation f étant biunivoque, on trouve

$$Q=f(\varphi(Q))=f(\lim_{n=\infty} E_n)=\lim_{n=\infty} f(E_n)=\lim_{n=\infty} H_n.$$

Tout sous-ensemble de E est donc de la forme $\lim_{n=\infty} H_n$ où $H_n\epsilon\Phi$ pour $n=1,2,3,\ldots$ Il est ainsi établi que $\boldsymbol{P_4\to P_1}$; le théorème est ainsi démontré.

On démontre sans peine que pour qu'un ensemble linéaire N satisfasse à la condition de la proposition $\boldsymbol{P_4}$, il faut et il suffit que toute fonction réelle définie sur N soit de classe $\leqslant 1$ sur N. En vertu de notre théorème, il en résulte tout de suite que *chacune des propositions* $\boldsymbol{P_1}$-$\boldsymbol{P_4}$ *équivaut à la proposition* $\boldsymbol{P_5}$ *suivante*:

$\boldsymbol{P_5}$. *Il existe un ensemble linéaire indénombrable N, tel que toute fonction réelle définie sur N est de classe $\leqslant 1$ sur N.*