Sur une propriété des ensembles clairsemés.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

M. Kuratowski a démontré récemment que toute infinité bien ordonnée d'ensembles clairsemés croissants (décroissants) est dénombrable[1]. Dans cette Note nous démontrerons un théorème sur les familles quelconques d'ensembles clairsemés (d'un espace à m dimensions), ordonné d'après leurs grandeurs, théorème dont on pourra déduire sans peine celui de M. Kuratowski.

Théorème: Une somme d'une infinité quelconque d'ensembles clairsemés, tels que de tous deux un est contenu dans l'autre, est effectivement énumérable.

Démonstration. Soit $\mathcal{F}=\{C\}$ une famille d'ensembles clairsemés qui sont en relation d'inclusion (c'est à-dire, C_1 et C_2 étant deux ensembles appartenant à $\mathcal{F}$, une au moins de deux relations subsiste: $C_1 \subset C_2$ et $C_2 \subset C_1$). Désignons par $S=\Sigma C$ la somme de tous les ensembles C constituant $\mathcal{F}$. Tout ensemble clairsemé est, comme j'ai démontré ailleurs effectivement énumérable[2]. Pour démontrer notre théorème il suffira donc supposer que l'ensemble S n'est pas clairsemé: dans ce cas il contient un sous-ensemble dense en soi D qui y est le plus grand.

Soit C un ensemble donné appartenant à $\mathcal{F}$, $P=\Pi Q$ — un produit dont les facteurs appartiennent à $\mathcal{F}$. Je dis que C et P sont en relation d'inclusion[3]). En effet, un des deux cas subsiste toujours: il existe un facteur Q du produit P contenu dans C, et

[1]) V. ce volume, p. 42, note [1]).

[2]) V. *Fund. Math.* t. I, p. 2.

[3]) Nous conviendrons ici de regarder un ensemble vide comme contenu dans tout ensemble.

alors on a $P \subset C$, ou bien un tel facteur n'existe pas, et alors (tout Q et C, comme ensembles appartenant à $\mathcal{F}$, étant dans la relation d'inclusion) on a $Q \supset C$ pour tout facteur Q de P, d'où: $P \supset C$.

Nous pouvons, comme on sait, ranger dans une suite infinie bien déterminée toutes les sphères m-dimensionnelles dont les rayons sont rationnels et dont les centres ont des coordonnées rationnelles. Soient S_n $(n=1, 2, 3, \ldots)$ les sphères consécutives de cette suite qui ont des points communs avec l'ensemble D. Nous aurons donc $S_n D \neq 0$ pour $n=1, 2, 3, \ldots$ par conséquent (D étant contenu dans $S = \Sigma C$) il existe, pour tout indice n donné, un ensemble C de la famille $\mathcal{F}$ tel que $S_n D C \neq 0$: nous désignerons (pour n donné) par P_n le produit de tous ces ensembles C. Je dis que $S = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots$

En effet, posons $T = P_1 + P_2 + \ldots$ et admettons que $S \neq T$. Nous avons toutefois $S \supset P_n$ $(n=1, 2 \ldots)$, donc $S \supset T$. Par conséquent, si $S \neq T$, il existe (d'après $S = \Sigma C$) un ensemble C_0 de la famille $\mathcal{F}$ qui n'est pas contenu dans T: un tel ensemble C_0 ne vérifie non plus la relation $C_0 \subset P_n$ pour aucun n naturel. Or, comme nous savons, C_0 et P_n sont en relation d'inclusion: il est donc $C_0 \supset P_n$ pour $n=1, 2, 3, \ldots$, d'où $C_0 \supset P_1 + P_2 + \ldots = T$.

Je dis que l'ensemble TD est dense dans D. En effet, soit p un point de D, H — l'intérieur d'une sphère quelconque entourant p. L'ensemble HD (comme contenant p) n'est pas vide: donc (d'après $D \subset S$), nous avons $HDS \neq 0$ et il existe un ensemble C_1 de la famille $\mathcal{F}$ tel que $HDC_1 \neq 0$. Or, HDC_1, comme sous-ensemble de l'ensemble clairsemé C_1, est clairsemé, donc contient un point isolé, q. Or, q étant un point isolé de C_1 intérieur à H, il existe une sphère rationnelle intérieure à H, contenant à son intérieur q et ne contenant aucun point de l'ensemble HDC_1, autre que q. Ce sera évidemment une sphère de la suite S_n, soit S_k (car c'est une sphère rationnelle ayant un point commun q avec D). Il est clair que l'ensemble P_k se compose d'un seul point, q (puisque l'ensemble $S_k DC_1 = S_k DC_1 H$ se réduit au point q et puisque il en est de même pour les ensembles $C \subset C_1$ pour lesquels $S_k DC \neq 0$). Donc $T = \sum_n P_n$ contient le point q (qui appartient à HD). Nous avons donc prouvé que tout entourage du point p de D contient un point de TD. L'ensemble TD est donc dense dans D. L'ensemble D étant dense en soi, il en résulte que TD est dense en soi. L'ensemble clairsemé $C_0 \supset T$ contiendrait donc un sous-ensemble dense en soi TD, ce qui est impossible.

Nous avons donc $S = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots$. Or les ensembles $P_n (n = 1, 2, \ldots)$ comme produits d'ensembles clairsemés, sont clairsemés (ou vides). Il existe, comme on sait, une loi d'après laquelle on peut énumérer effectivement les éléments de tout ensemble clairsemé[1]): il en résulte que l'ensemble $S = P_1 + P_2 + \ldots$ est effectivement énumérable, c. q. f. d.

Notre théorème et ainsi démontré.

Il importe de remarquer que les ensembles C constituant la famille $\mathcal{F}$ peuvent former une infinité non dénombrable. Soit, en effet, P un ensemble parfait linéaire non dense, S — l'ensemble des centres de tous les intervalles contigus à l'ensemble P: ce sera évidemment un ensemble isolé. Pour tout point p de P désignons par $C(P)$ l'ensemble de tous les points de S situés à gauche de p: les ensembles $C(p)$ seront donc tous isolés (donc clairsemés). On voit sans peine que lorsque p et q sont deux points de P tels que $p < q$, on aura $C(p) \neq C(q)$ et $C(p) \subset C(q)$. La famille $\mathcal{F}$ constituée par tous les ensembles $C(p)$, où p appartient à P, aura donc la puissance du continu. Donc:

Une infinité d'ensembles isolés, tels que de tous deux un est toujours contenu dans l'autre, peut être de puissance du continu.

Or on peut sans peine déduire de notre théorème la proposition que voici:

Une infinité bien ordonnée d'ensembles clairsemés croissants est effectivement énumérable[2]).

Soit, en effet, $\mathcal{F} = \{C\}$ une telle infinité d'ensembles, $S = \Sigma C$ la somme des ensembles constituant $\mathcal{F}$: d'après notre théorème l'ensemble S est effectivement énumérable. Nous savons donc ranger les éléments de S en une suite infinie

$$s_1, s_2, s_3, \ldots \tag{1}$$

Soit C_0 un ensemble donné appartenant à $\mathcal{F}$. Si $C_0 = S$, posons

[1]) V. *Fund. Math.* t. I, p. 5.

[2]) Une proposition analogue pour les ensembles clairsemés décroissants résulte immédiatement de la remarque que tout ensemble clairsemé est effectivement énumérable

$\mu(C_0) = 0$. Si $C_0 \neq S$, il existe dans la somme $S = \Sigma C$ des termes plus grands que C_0 (c'est-à-dire des ensembles C de $\mathcal{F}$ contenants C_0 et non contenus dans C_0) et parmi eux un le plus petit C^* (puisque les ensembles C forment une famille $\mathcal{F}$ bien ordonnée d'après les grandeurs croissantes des C). Soit s_n le premier terme de la suite (1) appartenant à $C^* - C_0$: nous poserons $\mu(C_0) = n$. Ainsi à tout ensemble C de $\mathcal{F}$ correspond un entier déterminé $\mu(C) \geqslant 0$ et il est clair qu'aux ensembles distincts correspondent des entiers différents (puisque, lorsque $C_1 \subset C_2$ et $C_1 \neq C_2$, $s_{\mu(C_1)}$ n'appartient à C_2 et $s_{\mu(C_2)}$ n'appartient pas à C_2). L'ensemble $\mathcal{F}$ est donc effectivement énumérable c. q. f. d.

Nous avons en même temps démontré le théorème de M. Kuratowski sans faire appel à l'axiome de M. Zermelo et n'utilisant pas les nombres transfinis.
