Un théorème sur les ensembles qui sont à la fois F_σ et G_δ.

Par

Zygmunt Zalcwasser (Varsovie).

Le but de cette Note est une généralisation du théorème de M. Kuratowski[1]), d'après lequel toute infinité bien ordonnée d'ensembles clairsemés croissants (décroissants) est dénombrable. Nous démontrerons notamment le théorème suivant:

Théorème: Toute infinité bien ordonnée d'ensembles croissants (décroissants) qui sont à la fois F_δ et G_δ est dénombrable.

Démonstration. Soit $\{H_\alpha\}$ $(\alpha<\mu)$ une suite transfinie, du type μ, d'ensembles croissants H_α qui sont à la fois F_σ et G_δ (c'est-à-dire qui sont en même temps sommes d'infinité dénombrable d'ensembles fermés et produits d'infinité dénombrable d'ensembles ouverts). Pour démontrer que $\mu<\Omega$ supposons, par contre, que $\mu\geqslant\Omega$.

Les ensembles H_α croissant avec α, nous avons

$$R_\alpha=H_{\alpha+1}-H_\alpha\neq 0 \text{ pour } \alpha<\Omega \quad\text{et}\quad R_\alpha\neq R_\beta \text{ pour } \alpha<\beta<\Omega.$$

Dans chacun des ensembles $R_\alpha\,(\alpha<\Omega)$ choisissons un point p_α. L'ensemble $\{p_\alpha\}$ $(\alpha<\Omega)$ sera évidemment non dénombrable: désignons-le par P. Soit K l'ensemble de tous les points de condensation de P (appartenant à P ou non): ce sera, comme on sait, un ensemble parfait et tout son point sera un point de condensation de PK. Soit D un sous-ensemble dénombrable de PK, dense dans PK (donc aussi dans K) et soient p_{α_n} $(n=1, 2, 3,\dots)$ les points de la suite transfinie $\{p_\alpha\}$ constituant D. D'après $\alpha_n<\Omega$ $(n=1, 2\dots)$

[1]) V, ce volume, p. 42, note [1]).

il existe un nombre ordinal $\lambda < \Omega$ tel que $\alpha_n < \lambda$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, ce qui donne $D \subset H_\lambda$ (la suite $\{H_\alpha\}$ étant croissante). L'ensemble $E = KH_\lambda \supset D$ est donc dense dans K. Or chaque point de K est un point de condensation de PK, donc un point limite de l'ensemble $PK - Q$, où Q désigne l'ensemble dénombrable de points p_α $(\alpha < \lambda)$; d'autre part nous avons $(PK - Q)H_\lambda = 0$, $PK - Q$ ne contenant que des points p_α dont les indices α sont $\geqslant \lambda$ et p_α n'appartenant à H_λ pour $\alpha \geqslant \lambda$ (puisqne p_α appartient à $H_{\alpha+1} - H_\alpha$, où $H_\alpha \supset H_\lambda$ pour $\alpha \geqslant \lambda$): nous avons donc $PK - Q \subset K - H_\lambda$, ce qui prouve que l'ensemble $K - H_\lambda$ est dense dans K.

Les ensembles KH_λ et $K - H_\lambda$ seraient donc tous les deux denses dans l'ensemble parfait K. Or, H_λ étant un F_σ et un G_δ et K un F, KH_λ et $K - H_\lambda$ sont des F_σ: nous pouvons donc poser $KH_\lambda = M_1 + M_2 + \ldots$ et $K - H_\lambda = N_1 + N_2 + \ldots$, M_n *et* N_n $(n = 1, 2, \ldots)$ désignant des ensembles fermés. Les ensembles $K - M_n \supset K - H_\lambda$ et $K - N_n \supset KH_\lambda$ étant denses dans K, il résulte que les ensembles fermés M_n et N_n sont non denses dans K (pour $n = 1, 2, \ldots$). Les ensembles KH_λ et $K - H_\lambda$, dont la somme est K, seraient donc tous les deux de première catégorie par rapport à l'ensemble parfait K, ce qui est, comme on sait, impossible.

Notre théorème est ainsi démontré pour les suites croissantes. Pour le prouver pour les suites décroissantes, il suffit de remarquer que le complémentaire d'un ensemble qui est à la fois F_σ et G_δ jouit de la même propriété et d'appliquer le théorème déjà démontré aux complémentaires d'ensembles donnés. Remarquons que notre théorème est en défaut pour les ensembles F_σ ou G_δ généraux (croissants ou décroissants).

Les ensembles fermés et les ensembles ouverts étant à la fois F_σ et G_δ, on peut regarder les théorèmes connus sur les suites transfinies d'ensembles fermés ou ouverts, croissants ou décroissants [1]), comme des cas particuliers de notre théorème.

Le théorème de M. Kuratowski peut être aussi regardé comme un cas particulier de notre théorème, tout ensemble clairsemé étant à la fois un F_σ et un G_δ [2]).

[1]) V. p. e. F. Hausdorff: Grundzüge der Mengenlehre Leipzig 1914, p. 275.
[2]) F. Hausdorff l. c. p. 306.