Une remarque sur les classes $(\mathcal{L})$ de M. Fréchet.

Par

Casimir Kuratowski (Varsovie).

Dans une Note „*Sur l'équivalence de trois propriétés des ensembles abstraits*" [1]) M. Sierpiński s'occupe des relations entre les propriétés suivantes des classes $(\mathcal{L})$:

(α) toute infinité bien ordonnée d'ensembles fermés croissants est dénombrable;

(β) toute infinité bien ordonnée d'ensembles fermés décroissants est dénombrable;

(γ) tout ensemble infini E d'éléments de la classe considérée contient un sous-ensemble dénombrable D dense en E (c'est-à-dire tel que $E \subset D + D'$);

(δ) tout ensemble clairsemé est fini ou dénombrable [2]).

M. Sierpiński démontra que (δ) entraîne (β) et que (γ) entraîne (α). Il établit aussi pour les classes $(\mathcal{S})$ [3]) les implications inverses: (β) entraîne (δ) et (α) entraîne (γ). Cependant le problème de ces deux dernières implications pour les classes $(\mathcal{L})$ en général est resté non résolu. Je me propose dans cette Note d'en donner la résolution *négative*. Je définis notamment une classe $(\mathcal{L})$ qui tout en ayant les propriétés (α) et (β) ne jouit ni de (γ) ni de (δ).

A désignant l'espace linéaire et l la limite d'une suite $\{x_n\}$ de points (distincts l'un de l'autre) de cet espace, posons

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots) = -l = -\lim_{n=\infty} x_n.$$

[1]) *Fundamenta Mathematicae*, t. II.

[2]) Comme l'a demontré M. Sierpiński, la condition (δ) équivaut à la suivante: tout ensemble non dénombrable contient au moins un élément de condensation.

[3]) Une classe $(\mathcal{L})$ est dite classe $(\mathcal{S})$, lorsque l'ensemble dérivé de tout ensemble d'éléments de cette classe est fermé.

En considérant $f(x_1, x_2, x_n, \ldots)$ comme „l'élément limite" de la suite $\{x_n\}$, A constitue évidemment une classe $(\mathfrak{L})$. Nous allons prouver que c'est bien la classe cherchée.

Convenons de dire que les termes: ensemble fermé, dense en soi etc., sont employés dans le sens habituel, lorsqu'on les suppose définis à l'aide de la limite ($\lim\limits_{n=\infty} x_n$) au sens établi dans la théorie des nombres réels. Par contre, en les supposant fondés sur la notion d'élément limite définie par f, on dira qu'ils sont employés dans le sens abstrait.

Soit F un ensemble fermé (au sens abstrait) et soit $N(F)$ le plus grand ensemble dense en soi (au sens habituel) qui est contenu dans F (l'ensemble $N(F)$ est le noyau de F; il peut d'ailleurs être vide). Je dis que $N(F)$ est fermé au sens habituel.

En effet, soit $l = \lim x_n$, les x_n étant des éléments de $N(F)$. Par définition de $N(F)$, il existe pour tout x_n une suite d'éléments de $N(F)$ convergente (au sens habituel) vers x_n. Or, l'ensemble F étant fermé au sens abstrait, les points $(-x_n)$ ainsi que leur élément limite $f(-x_1, -x_2, \ldots -x_n, \ldots)$ appartiennent à F et comme $f(-x_1, -x_2, \ldots -x_n, \ldots) = -\lim(-x_n) = l$, l est un élément de F. De plus, l appartient à $N(F)$, car l est la limite d'une suite d'éléments de $N(F)$ et $N(F)$ est fermé (au sens habituel) relativement à F. Donc $N(F)$ est fermé au sens habituel du mot.

Observons maintenant que, par définition du noyau, l'inclusion $X \subset Y$ implique que $N(X) \subset N(Y)$. Par conséquent, si $\boldsymbol{F}$ est une classe bien ordonnée d'ensembles croissants ou décroissants fermés au sens abstrait, la classe $\boldsymbol{N}$ des noyaux (différents) de ces ensembles est une classe bien ordonnée d'ensembles croissants ou décroissants fermés au sens habituel.

Soit N_0 un élément donné de la classe $\boldsymbol{N}$. Envisageons la classe $\boldsymbol{K}$ de tous les K qui appartiennent à $\boldsymbol{F}$ et ont pour noyau l'ensemble N_0. Comme les différences $K - N_0$ constituent une classe bien ordonnée d'ensembles croissants ou décroissants clairsemés au sens habituel, la classe $\boldsymbol{K}$ est finie ou dénombrable [1]). Parsuite, si

[1]) Je m'appuie sur les deux propriétés suivantes d'ensembles clairsemés tirés d'un espace euclidien à n dimensions:

1) toute infinité bien ordonnée d'ensembles clairsemés décroissants est dénombrable;

2) toute infinité bien ordonnée d'ensembles clairsemés croissants est dénombrable. Pour établir la première propriété il suffit de remarquer que tout ensemble

la classe F était non dénombrable, N serait une classe bien ordonnée non dénombrable d'ensembles croissants ou décroissants (respectivement) fermés au sens habituel, ce qui est impossible.

Donc, les conditions (α) et (β) sont réalisées. Pour démontrer que (γ) et (δ) ne le sont pas, il suffit de remarquer que l'ensemble de tous les $x > 0$ est un ensemble non dénombrable isolé (au sens abstrait), puisque aucun x positif ne peut être „élément limite" d'une suite de x_n positifs.

---

clairsemé est dénombrable. Quant à la seconde, supposons, par contre, qu'il existe une classe bien ordonnée $\boldsymbol{C}$ du type Ω d'ensembles clairsemés croissants et désignons par S la somme de ces ensembles. L'ensemble S étant évidemment non dénombrable, il existe un ensemble (non vide) dense en soi D contenu dans S. Soit E un sous-ensemble dénombrable de D dense en D; parsuite E est dense en soi. Or, E étant dénombrable, il existe, d'après la propriété fondamentale du nombre Ω, un ensemble-élément C de $\boldsymbol{C}$ tel que $E \subset C$. Mais, E étant dense en soi, cette inclusion signifie que C n'est pas clairsemé, — contrairement à l'hypothèse. Notre théoreme est donc démontré.

On voit aisément que notre démonstration est valable pour les ensembles clairsemés tirés d'une classe ($\mathfrak{S}$) quelconque jouissant des propriétés (γ) et (δ).

Tout récemment M. Sierpiński et M. Zalcwasser m'ont communiqué quelques généralisations remarquables de ce théorème (V. ce volume, p. 44 et 46).
