Sur un ensemble abstrait, dont chaque élément est un élément limite de chaque sous-ensemble non dénombrable.

Par

B. Knaster et W. Sierpiński (Varsovie).

Le but de cette Note est de prouver l'existence et, en même temps, d'indiquer quelques caractères fondamentaux des classes $\mathfrak{L}$[1]) non dénombrables jouissant de la propriété $\boldsymbol{P}$ suivante:

chaque élément de la classe considérée est un élément limite de chaque ensemble non dénombrable qui en fait partie.

Il est évident qu'une classe $(\mathfrak{L})$ pourvue de la propriété $\boldsymbol{P}$ ne renferme aucun vrai sous-ensemble non dénombrable et fermé. De plus, tout son élément est un élément de condensation de chacun de ses sous-ensembles non dénombrables. Enfin, a_1 et a_2 désignant deux éléments arbitraires d'une classe pareille, E_1 un sous-ensemble de cette classe dans lequel a_1 est intérieur, et E_2 un ensemble analogue par rapport à a_2, les ensembles E_1 et E_2 ont une infinité non dénombrable d'élements communs, puisque chacun d'eux ne diffère de la classe entière que par un ensemble tout au plus dénombrable. Il n'existe donc d'entourages disjoints pour aucun couple d'éléments d'une classe $(\mathfrak{L})$ qui jouit de la propriété $\boldsymbol{P}$.

Théorème I. *Toute classe $(\mathfrak{L})$ à propriété $\boldsymbol{P}$ est de puissance non supérieure à celle du continu.*

Démonstration. Soit, en effet, C une classe $(\mathfrak{L})$ non dénombrable à propriété $\boldsymbol{P}$ et E un ensemble quelconque de puissance $\aleph_1$ contenu dans cette classe. Il existe $\aleph_1^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ suites infinies d'éléments de E, par conséquent E admet tout au plus $\mathfrak{c}$ éléments limites.

[1]) Au sens de M. Fréchet.

Comme chaque élément de C est par définition un élément limite de E, la puissance de C ne peut dépasser celle du continu.

Ce théorème nous conduit d'une façon naturelle à chercher une classe $(\mathcal{L})$ à propriété $\boldsymbol{P}$ parmi les ensembles composés des nombres réels.

Nous allons employer désormais le terme *élément limite* exclusivement dans le sens abstrait, c'est-à-dire, pour désigner l'élément assigné par la définition d'une classe $(\mathcal{L})$ à une suite infinie de ses éléments. Quant au nombre vers lequel cette suite puisse converger (au sens habituel du mot), convenons de l'appeler son *élément d'accumulation*. Tous les autres termes, par exemple, celui d'ensemble *dérivé* E' d'un ensemble E, seront regardés comme définis à l'aide d'élément d'accumulation, à moins de mention expresse. Enfin, $f(x)$ étant une fonction à variable réelle, le signe $f(E)$ nous servira à désigner l'ensemble de valeurs de $f(x)$ pour tous les x qui appartiennent à l'ensemble E et le signe $E(y)$ — l'ensemble de valeurs de x, qui satisfont à l'équation $f(x) = y$.

Ceci posé, soit C un ensemble quelconque de nombres réels et $f(x)$ une fonction qui vérifie la formule

$$f(C) \subset C. \tag{1}$$

Lorsque pour tout élément c de C on considère $f(c)$ comme *élément limite* de chaque suite infinie d'éléments de C qui a c pour *élément d'accumulation*, l'ensemble C constitue une classe $(\mathcal{L})$. Nous appellerons „*classe* $(\mathcal{L})_f$" toute classe $(\mathcal{L})$ de nombres réels qui est définie de la sorte [1]).

Théorème II. *C étant une classe $(\mathcal{L})_f$, la condition suivante est nécessaire et suffisante pour que C jouisse de la propriété* $\boldsymbol{P}$:

(2) *chaque ensemble parfait P qui a une infinité non dénombrable d'éléments communs avec C vérifie l'égalité*
$$f(P \cdot C) = C.$$

Démonstration. 1°. Soit C une classe $(\mathcal{L})_f$ à propriété $\boldsymbol{P}$ et P un ensemble parfait tel que le produit $P \cdot C$ est non dénombrable.

Chaque élément c de C est en vertu de la propriété $\boldsymbol{P}$ de C un élément limite de $P \cdot C$. Il existe donc dans C, conformément

[1]) Ce procédé de construction de classes $(\mathcal{L})$ a été précisé par M. Kuratowski. Il est à remarquer que tous les théorèmes de cette Note restent vrais, quand C désigne un ensemble quelconque de points d'un espace à n dimensions ($n \geq 1$).

à la définition d'élément limite adoptée pour les classes $(\mathfrak{L})_{,}$, un élément d'accumulation p de $P.C$ appartenant à C et satisfaisant à l'équation $f(p)=c$. L'ensemble P étant parfait, p appartient à $P.C$ et, par suite, c est un élément de $f(P.C)$. Il en résulte que

$$C \subset f(P.C). \tag{3}$$

D'autre part, on a en vertu de la formule (1):

$$f(P.C) \subset C. \tag{4}$$

Les formules (3) et (4) donnent

$$f(P.C) = C,$$

ce qui prouve que la condition (2) est nécessaire.

2°. C désignant une classe $(\mathfrak{L})_{,}$, supposons la condition (2) réalisée. Soit N un sous-ensemble non dénombrable de C et c un élément arbitraire de cette classe. Il s'agit de prouver que c est un élément limite de N.

Or, l'ensemble fermé et non dénombrable $N+N'$ contient un noyau parfait P et le produit $P.N$ est non dénombrable. Comme $N \subset C$, le produit $P.C$ est non dénombrable à plus forte raison et on a selon (2):

$$f(P.C) = C.$$

Il existe donc un élément p de $P.C$ qui vérifie l'équation

$$f(p) = c. \tag{5}$$

P étant un sous-ensemble parfait de $N+N'$, chaque élément de P, et par conséquent p, est un élément d'accumulation de N. On en conclut en vertu de (5) que c est un élément limite de N. La condition (2) est donc suffisante.

Théorème III. *Il existe une classe $(\mathfrak{L})_{,}$ non dénombrable qui possède la propriété* **P**.

Démonstration. MM. Lusin et Sierpiński[1]) ont établi, en s'appuyant sur le théorème de M. Zermelo, l'existence d'une décomposition de l'ensemble de tous les nombres réels en une infinité de puissance du continu d'ensembles disjoints E_x, dont chacun a des éléments communs avec chaque ensemble parfait (x admettant toutes les valeurs réelles).

[1]) *C. R.* t. 165; voir aussi W. Sierpiński, *Bull. de l'Ac. des Sc. de Cracovie*, 1918, p. 150.

Posons pour tout e de E_x

$$f(e) = x$$

et considérons la classe $(\mathfrak{L})_f$ ainsi définie, composée de tous les nombres réels. En vertu du théorème II cette classe possède la propriété $\boldsymbol{P}$.

L'existence des classes $(\mathfrak{L})$ non dénombrables à propriété $\boldsymbol{P}$ est donc établie.

Corollaire. *Pour qu'il existe une classe* $(\mathfrak{L})_f$ *à propriété* $\boldsymbol{P}$ *de puissance* $\mathfrak{m} > \aleph_0$, *il faut et il suffit que* $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{c}$.

Démonstration. En vertu du théorème I la condition est nécessaire.

D'autre part, il existe d'après le théorème III une classe $(\mathfrak{L})_f$ de puissance $\mathfrak{c}$. pourvue de la propriété $\boldsymbol{P}$. C désignant cette classe. l'inégalité $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{c}$ entraîne l'existence d'un sous-ensemble M de C, qui est de puissance $\mathfrak{m}$. Or, il est évident que tout sous-ensemble d'une classe $(\mathfrak{L})_f$ pourvue de la propriété $\boldsymbol{P}$ en est pourvu également. M est donc une classe $(\mathfrak{L})_f$ de puissance $\mathfrak{m}$ et jouit de la propriété $\boldsymbol{P}$, ce qui prouve que la condition est suffisante.

On pourrait encore dire: pour que dans un ensemble non dénombrable la limite puisse être définie de sorte qu'il soit une classe $(\mathfrak{L})$ à propriété $\boldsymbol{P}$, il faut et il suffit que cet ensemble ait une puissance non supérieure à celle du continu.

Le théoreme III suggère d'une façon naturelle deux problèmes suivants.

La premier consiste à donner un exemple effectif[1]) d'une classe $(\mathfrak{L})$ à propriété $\boldsymbol{P}$. La fonction $f(e)$ envisagée dans ce théorème n'a pas été définie; c'est seulement son existence qui a été démontrée[2]). Le théorème III ne donne pour cette raison aucun moyen de définir individuellement une classe $(\mathfrak{L})$ non dénombrable qui possède la propriété $\boldsymbol{P}$.

Toutefois ce théorème nous permet d'anticiper une conséquence qui se présenterait, si l'on savait définir une classe

[1]) Cf. W. Sierpiński, *Sur les exemples effectifs et l'axiome de M. Zermelo*, Fund. Math. II, 1921.

[2]) On voit sans peine que cette fonction est non mesurable au sens de M. Lebesgue.

non dénombrable $(\mathfrak{L})$ à propriété $\boldsymbol{P}$ et qui soit en même temps une classe $(\mathfrak{L})_f$.

Supposons, en effet, que l'on sache définir une classe pareille et qu'on en puisse nommer d'une façon effective un élément individuel c. Or, cette hypothèse donne lieu immédiatement à la définition d'un ensemble non dénombrable ne contenant aucun ensemble parfait. C'est évident, lorsque la classe elle même ne contient aucun ensemble parfait. Admettons donc qu'elle en contient un et désignons par P un sous-ensemble parfait de cette classe.

L'ensemble P étant parfait, il y existe, comme on voit sans peine, $\mathfrak{c}$ sous ensembles parfaits disjoints et chacun d'eux admet des éléments communs avec $E(c)$ en vertu du théorème II. L'ensemble $E(c)$ est donc non dénombrable. En même temps il ne contient aucun ensemble parfait, puisque chaque sous-ensemble parfait de la classe considérée a des éléments communs avec tout $E(x)$, où $x \neq c$.

Ainsi notre hypothèse entraîne en tout cas une définition d'un ensemble non dénombrable ne contenant aucun ensemble parfait.

Le second problème est de savoir, s'il existe des classes $(\mathfrak{S})$ pourvues de la propriété $\boldsymbol{P}$. Le théorème suivant en donne une solution partielle.

Théorème IV. *Aucune classe non dénombrable* $(\mathfrak{L})_f$ *à propriété* $\boldsymbol{P}$ *n'est pas une classe* $(\mathfrak{S})$.

Démonstration. C désignant une classe non dénombrable $(\mathfrak{L})_f$ à propriété $\boldsymbol{P}$, soit

$$c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n, \ldots \tag{7}$$

une suite contenue dans C et ayant un élément c de C pour l'élément d'accumulation. On peut évidemment admettre que tous les éléments de cette suite soient distincts de $f(c)$. Soit d'autre part Q l'ensemble de tous les éléments de condensation de C qui appartiennent à C et

$$q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n, \ldots$$

une suite décroissante contenue dans Q et ayant pour l'élément d'accumulation un élément q de Q, choisi de façon que $f(q)$ soit également distinct de $f(c)$. Chaque intervalle (q, q_n) contenant une infinité non dénombrable d'éléments de C, il y existe en vertu de la propriété $\boldsymbol{P}$ de C une suite S_n ayant c_n pour l'élément limite.

Envisageons la somme

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} S_n .$$

Or, on voit sans peine que l'ensemble limite L de S se compose de $f(q)$ et de tous les éléments de la suite (7). Mais il ne contient pas $f(c)$, tandis que c'est justement $f(c)$ qui est le seul élément limite de L.

Il existe donc dans C un ensemble S dont l'ensemble limite L n'est pas fermé (au sens abstrait du terme). Par conséquent C n'est pas une classe ($\mathcal{S}$).