Sur l'inversion des fonctions représentables analytiquement.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

D'après un théorème de M. Lebesgue. démontré par MM. Lusin et Souslin, si $y=f(x)$ est une fonction représentable analytiquement qui prend, pour x réels, toutes les valeurs réelles y, chacune une fois, et détermine parsuite une fonction inverse $x=\varphi(y)$ — cette fonction inverse est aussi représentable analytiquement [1]).

Or la question se pose: *$f(x)$ étant une fonction d'une classe donnée α, quelle est la classe de la fonction inverse $\varphi(y)$?* En particulier, quelle est la classe d'une fonction inverse pour une fonction de classe 1? [2]).

Nous prouverons qu'on ne peut rien dire en général sur la classe des fonctions inverses, notamment nous démontrerons que α étant un nombre ordinal donné quelconque $<\Omega$, il existe toujours une fonction $\varphi(y)$ de classe $\geqslant\alpha$, inverse d'une fonction $f(x)$ de classe 1.

Notre démonstration sera fondée sur une propriété remarquable des ensembles mesurables B (§ 1).

[1]) V. p. e. H. Lebesgue: Remarques sur les théories de la mesure et de l'intégration. *Ann. de l'Ec. Norm.* t. 35 (1918), p. 241 et 242. Ce théorème résulte d'ailleurs tout de suite du théoreme III suivant de ma Note „Sur les images des fonctions représentables analytiquement" (*Fund. Math.* t. II, p. 78): Pour qu'une fonction soit représentable analytiquement, il faut et il suffit que son image soit mesurable B.

En effet, il suffit de s'appuyer sur la remarque que les images d'une fonction et de sa fonction inverse sont superposables: donc, si l'une d'elles est mesurable B, l'autre l'est aussi.

[2]) M. Mazurkiewicz a démontré en 1913 qu'une fonction inverse d'une fonction de classe 1 n'est pas nécessairement de classe 1 (*Wektor*, t. III).

1. Soit E un ensemble linéaire donné, mesurable B. D'après un théorème de M. Lusin, E peut être regardé comme noyau d'un système d'unicité [1]). Cela veut dire qu'on peut faire correspondre à tout système fini d'indices (naturels) $n_1, n_2, \ldots, n_k$ un intervalle (fermé) $\delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ de sorte que

1) pour tout point x de E existe une suite infinie unique d'indices $n_1, n_2, n_3, \ldots$, telle que x appartienne à chacun des intervalles

$$(1) \qquad \delta_{n_1}, \ \delta_{n_1, n_2}, \ \delta_{n_1, n_2, n_3}, \ldots$$

2) $n_1, n_2, n_3, \ldots$ étant une suite infinie donnée quelconque de nombres naturels, il existe au plus un point commun à chacun des intervalles (1), et ce point (s'il existe) appartient à l'ensemble E.

On peut encore supposer que les longueurs des intervalles (1) convergent vers 0 pour toute suite (1).

Soit donc $S = \{\delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ un système d'unicité déterminant l'ensemble E. Désignons par M l'ensemble de tous les nombres irrationnels ξ de l'intervalle $(0, 1)$ donnant un développement en fraction continue (infinie)

$$(2) \qquad \xi = \frac{1|}{|n_1} + \frac{1|}{|n_2} + \frac{1|}{|n_3} + \ldots.$$

tels que les intervalles

$$(3) \qquad \delta_{n_1}, \delta_{n_1, n_2}, \delta_{n_1, n_2, n_3}, \ldots$$

ont un point commun: ce point est d'ailleurs, comme nous savons, unique (et appartient à E): il est donc déterminé par le nombre ξ et nous pouvons le désigner par $f(\xi)$. La fonction $f(\xi)$ sera ainsi définie dans l'ensemble M et ce sera, comme on voit sans peine, une fonction continue dans M (En effet. soit (2) un nombre donné de M, ε un nombre positif donné: les longueurs des intervalles (3)

[1]) C. R. t. 164, note du 8 janvier 1917. Le théorème de M. Lusin affirme que pour qu'un ensemble soit mesurable B, il faut et il suffit qu'il soit noyau d'un système d'unicité. Nous utilisons ici seulement la proposition que la condition du théorème de M. Lusin est nécessaire, proposition dont la démonstration n'offre pas de difficulté. Pour en achever il suffit de prouver que $E_1, E_2, E_3, \ldots$ étant un nombre fini ou une infinité dénombrable d'ensembles dont chacun est noyau d'un système d'unicité, il est de même de leur somme et de leur produit (pour la somme on peut d'ailleurs supposer les ensembles $E_1, E_2, \ldots$ sans point commun deux à deux) et de remarquer que tout intervalle peut être regardé comme noyau d'un système d'unicité.

convergeant vers 0, il existe un indice q tel que la longueur de $\delta_{n_1, n_2, \ldots, n_q}$ est $< \varepsilon$. Or, ξ' étant un nombre de M différent suffisamment peu de ξ, les q-ièmes réduits des fractions continues pour ξ et ξ' coïncideront: par conséquent les points $f(\xi)$ et $f(\xi')$ appartiendront tous les deux à l'intervalle $\delta_{n_1, n, \ldots, n_q}$ de longueur $< \varepsilon$. Nous aurons donc $|f(\xi') - f(\xi)| < \varepsilon$ pour ξ' suffisamment voisins de ξ, ce qui prouve la continuité de $f(\xi)$ dans M).

Or, E étant noyau du système d'unicité S, à tout point x de E correspond un nombre ξ de M unique tel que $f(\xi) = x$. L'ensemble $E = f(M)$ est ainsi une image biunivoque et continue (dans un sens) de l'ensemble M.

Nous prouverons maintenant que M est un ensemble G_δ (c'est-à-dire un produit dénombrable d'ensembles ouverts). Désignons par S_k la somme d'intérieurs de tous les intervalles dont les extrémités sont

$$(4) \qquad \frac{1\,|}{|\,n_1} + \frac{1\,|}{|\,n_2} + \ldots + \frac{1\,|}{|\,n_k} \quad \text{et} \quad \frac{1\,|}{|\,n_1} + \frac{1\,|}{|\,n_2} + \ldots + \frac{1\,|}{|\,n_k + 1},$$

la sommation s'étendant a tous les k-ièmes réduits des nombres ξ de M. Les S_k sont ainsi des ensembles ouverts et parsuite leur produit $P = S_1 S_2 S_3 \ldots$ est un ensemble G_δ: nous prouverons que $P = M$.

Soit ξ un nombre appartenant à M et donnant le développement (2): ξ sera évidemment, pour tout k naturel, intérieur à l'intervalle dont les extrémités sont (4), donc ξ appartient à l'ensemble S_k pour $k = 1, 2, 3, \ldots$ et parsuite aussi à P.

Or soit ξ un point du produit P. Pour tout k naturel il existe donc un intervalle aux extrémités (4) ($n_1, n_2, \ldots, n_k$ dépendant peut être de k) dont l'intérieur contient ξ et appartient à S_k. Or on voit sans peine que pour deux intervalles dont l'un a les extrémités

$$\frac{1\,|}{|\,p_1} + \frac{1\,|}{|\,p_2} + \ldots + \frac{1\,|}{|\,p_m} \quad \text{et} \quad \frac{1\,|}{|\,p_1} + \frac{1\,|}{|\,p_2} + \ldots + \frac{1\,|}{|\,p_m + 1}$$

et l'autre

$$\frac{1\,|}{|\,q_1} + \frac{1\,|}{|\,q_2} + \ldots + \frac{1\,|}{|\,q_n} \quad \text{et} \quad \frac{1\,|}{|\,q_1} + \frac{1\,|}{|\,q_2} + \ldots + \frac{1\,|}{|\,q_n + 1},$$

$m \leqslant n$, deux cas seulement peuvent se présenter: ces intervalles n'ont pas de points intérieurs communs, ou bien le second est contenu dans le premier (et dans ce cas $q_i = p_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, m$).

Il en résulte tout de suite qu'il existe pour le nombre ξ une suite infinie bien déterminée de nombres naturels $n_1, n_2, n_3, \ldots$ telle que ξ est, pour tout k naturel, intérieur à l'intervalle aux extrémités (4), intervalle dont l'intérieur appartient à S_k. Or, en remarquant que tout nombre réel intérieur à l'intervalle aux extrémités (4) donne un développement en fraction continue dont le k-ième réduit est

$$\frac{1|}{|n_1} + \frac{1|}{|n_2} + \ldots + \frac{1|}{|n_k}, \tag{5}$$

on en déduit immédiatement que ξ donne le développement en fraction continue infinie (2).

Soit k un nombre naturel donné. L'intérieur de l'intervalle aux extrémités (4) appartient à S_k: il en résulte de la définition de S_k que le nombre (5) est un réduit d'un nombre ξ_k de M; or ξ_k est un nombre irrationnel (comme appartenant à M): il donne donc un développement en fraction infinie

$$\xi_k = \frac{1|}{|n_1} + \frac{1|}{|n_2} + \ldots + \frac{1|}{|n_k} + \frac{1|}{|n_{k+1}^{(k)}} + \frac{1|}{|n_{k+1}^{(k)}} + \ldots.$$

Il en résulte de la définition de l'ensemble M que les intervalles

$$\delta_{n_1}, \ \delta_{n_1, n_2}, \ldots, \ \delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$$

ont un point commun. k étant un nombre naturel quelconque, nous avons donc démontré que tout nombre fini des intervalles (3) admet au moins un point commun il en résulte tout de suite, comme on sait, l'existence d'un point commun à tous les intervalles de la suite (3). D'après la définition de l'ensemble M, ξ est donc un point de M. Donc P est contenu dans M.

Nous avons donc démontré que $M = P$; l'ensemble M est ainsi un G_δ; c. q. f. d.

Or, d'après un théorème dû à M. Mazurkiewicz[1]) un ensemble G_δ linéaire non dénombrable est une somme de deux ensembles sans point commun dont l'un est homéomorphe de l'ensemble de tous les nombres irrationnels et l'autre est tout au plus dénombrable.

On arrive ainsi à la conclusion suivante:

Tout ensemble linéaire non dénombrable mesura-

[1]) Teorya zbiorów G_δ, § 17 (Wektor 1918).

ble B est une somme d'un ensemble au plus dénombrable et d'un ensemble qui est une image biunivoque et continue (dans un sens) de l'ensemble de tous les nombres irrationnels.

Remarquons qu'on pourrait déduire sans peine du théorème de M. Lusin que la réciproque est aussi vraie: on a ainsi le théorème:

Pour qu'un ensemble soit mesurable B, il faut et il suffit qu'il soit une somme de deux ensembles, dont l'un est au plus dénombrable et l'autre est un ensemble vide ou une image biunivoque et continue (dans un sens) de l'ensemble de tous les nombres irrationnels.

Nous avons ainsi une propriété topologique des ensembles mesurables B, propriété de laquelle découlent immédiatement plusieurs autres de ces ensembles, p. e les deux suivantes: Tout ensemble non dénombrable mesurable B contient un sous-ensemble parfait (théorème trouvé en 1916 indépendamment par MM. Alexandroff et Hausdorff), et: Une image biunivoque et continue (dans un sens) d'un ensemble mesurable B est un ensemble mesurable B (théorème trouvé par M. Lusin en 1918).

2. Soit E un ensemble O de classe $\alpha \geqslant 3$, formé des nombres irrationnels positifs[1]). (Un tel ensemble existe pour tout $\alpha < \Omega$). N désignant l'ensemble de tous les nombres irrationnels, posons $E_1 = N - E$ — ce sera un ensemble non dénombrable, mesurable B. L'ensemble E est aussi mesurable B et non dénombrable (comme O de classe $\alpha \geqslant 3$): d'après le théorème du § 1, E est donc une somme d'un ensemble au plus dénombrable D et d'un ensemble H qui est une image biunivoque et continue (dans un sens) de l'ensemble de tous les nombres irrationnels; de même $E_1 = D_1 + H_1$. Or l'ensemble de tous les nombres irrationnels est homéomorphe de l'ensemble de tous les nombres irrationnels positifs et de même de l'ensemble de tous les nombres irrationnels négatifs. Donc H est une image biunivoque et continue (dans un sens) de l'ensemble de tous les nombres irrationnels positifs et H_1 — de l'ensemble de tous les nombres irrationnels négatifs. Il existe donc une fonction $f(x)$,

[1]) On dit, d'après M. Lebesgue, qu'un ensemble de points est O de classe α, s'il peut être considéré comme l'ensemble $E(a < f(x) < b)$ relatif à une fonction $f(x)$ de classe α, et si cela est impossible à l'aide d'une fonction de classe inférieure à α.

définie dans l'ensemble de tous les nombres irrationnels et continue dans cet ensemble, qui prend des valeurs distinctes pour x différents et telle que l'ensemble de valeurs de $f(x)$ pour x irrationnels positifs est H et l'ensemble de valeurs de $f(x)$ pour x irrationnels négatifs est H_1. Nous complèterons maintenant la définition de la fonction $f(x)$ pour x rationnels comme suit.

L'ensemble de toutes les valeurs que prend $f(x)$ pour x irrationnels est $H+H_1=N-(D+D_1)$ (puisque $H=E-D$, $H_1=E_1-D_1$ $E+E_1=N$, $EE_1=0$). Soit

$$(6) \qquad u_1, u_2, u_3, \ldots$$

une suite infinie formée de tous les nombres rationnels non naturels. L'ensemble (6) étant dense dans tout intervalle, il existe des nombres u_n intérieurs à l'intervalle $(f(u_1+\sqrt{2})-1, f(u_1+\sqrt{2})+1)$ ($u_1+\sqrt{2}$ étant un nombre irrationnel, $f(u_1+\sqrt{2})$ a une valeur définie): soit v_1 ce d'entre eux dont l'indice est le plus petit et posons $f(u_1)=v_1$. Soit maintenant n un nombre naturel donné et supposons que nous avons déjà définis les valeurs $f(u_1)=v_1$, $f(u_2)=v_2,\ldots, f(u_{n-1})=v_{n-1}$. L'ensemble (6) étant partout dense, il existe des termes de la suite (6) autres que $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ et intérieurs à l'intervalle $\left(f\left(u_n+\frac{\sqrt{2}}{n}\right)-\frac{1}{n}, f\left(u_n+\frac{\sqrt{2}}{n}\right)+\frac{1}{n}\right)$: soit v_n le premier d'entre eux: nous poserons $f(u_n)=v_n$. Les valeurs $f(u_n)$ $(n=1, 2, 3,\ldots)$ sont ainsi définies par l'induction et la fonction $f(x)$ est maintenant définie pour tous les x réels non naturels. Soit maintenant

$$(7) \qquad t_1, t_2, t_3, \ldots$$

une suite infinie formée de tous les nombres naturels et de tous les termes de la suite (6) autres que $v_1, v_2, v_3, \ldots$ (s'il y en a). Posons $f(n)=t_n$ pour $n=1, 2, 3, \ldots$. La fonction $y=f(x)$ est ainsi définie pour tous les x réels et on voit sans peine qu'elle prend toutes les valeurs réelles, chacune une fois: elle admet donc une fonction inverse univoque $x=\varphi(y)$ (définie pour tout y réel). L'ensemble $E(\varphi(y)>0)$ est, comme on voit sans peine, somme de l'ensemble $H=E-D$ et d'un ensemble dénombrable (formé de nombres rationnels r pour lesquels $\varphi(r)>0$) ($x=\varphi(y)$ étant une fonction inverse de $y=f(x)$, l'ensemble $E(a<\varphi(y)<b)$ coïncide évidemment avec l'ensemble de toutes les valeurs que prend $f(x)$ pour $a<x<b$).

L'ensemble D étant au plus dénombrable et l'ensemble E étant un O de classe $\alpha \geqslant 3$, on en conclut sans peine que $E(\varphi(y) > 0)$ ne peut être un ensemble O de classe $< \alpha$[1]): par conséquent $\varphi(y)$ ne peut être une fonction de classe $< \alpha$.

Or nous démontrerons que la fonction $f(x)$ est continue pour tout x irrationel. Soit x_0 un nombre irrationnel donné, ε un nombre positif donné quelconque. La fonction $f(x)$ étant, comme nous savons, continue sur l'ensemble de tous les nombres irrationnels, il existe un nombre positif δ tel que l'inégalité

$$(8) \qquad |\xi - x_0| < \delta$$

entraîne pour les nombres irrationnels ξ l'inégalité

$$(9) \qquad |f(\xi) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Soit m un nombre naturel satisfaisant aux inégalités

$$(10) \qquad m > \frac{2\sqrt{2}}{\delta} \quad \text{et} \quad m > \frac{1}{\varepsilon}$$

et δ_1 un nombre positif satisfaisant aux $m+3$ inégalités:

$$(11) \qquad \delta_1 < \frac{\delta}{2}, \quad \delta_1 < x_0 - Ex_0, \quad \delta_1 < Ex_0 + 1 - x_0, \quad \delta_1 < |u_k - x_0| \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots m.$$

(Les nombres $x_0 - Ex_0$, $Ex_0 + 1 - x_0$, $|u_k - x_0|$ sont tous positifs, puisque x_0 est irrationnel et u_k rationnel).

Soit x un nombre réel satisfaisant à l'inégalité

$$(12) \qquad |x - x_0| < \delta_1.$$

Si x est irrationnel, nous pouvons mettre dans (8) $\xi = x$ (puisque, d'après (11), $\delta_1 < \delta$), ce qui donne l'inégalité (9) et, à plus forte raison, l'inégalité

$$(13) \qquad |f(x) - f(x_0)| < 2\varepsilon.$$

Soit maintenant x un nombre rationnel. D'après (12) et (11) nous trouvons sans peine

$$Ex_0 < x < Ex_0 + 1;$$

[1]) Puisque un ensemble O de classe $\beta \geq 2 \pm$ un ensemble au plus dénombrable est un ensemble O de classe $\leq \beta$, et un ensemble O de classe $\beta < 2 \pm$ un ensemble au plus dénombrable est O de classe ≤ 2.

donc, x ne peut être un nombre naturel et parsuite c'est un nombre de la suite (6), soit

(14) $$x = u_p.$$

D'après (14), (12) et (11) nous avons

$$|u_p - x_0| < |u_k - x_0| \qquad \text{pour } k = 1, 2, \ldots, m,$$

ce qui donne $p > m$, donc, d'après (10):

(15) $$p > \frac{2\sqrt{2}}{\delta} \quad \text{et} \quad p > \frac{1}{\varepsilon}.$$

D'après la définition de $f(u_p)$ nous avons l'inégalité

$$f\left(u_p + \frac{\sqrt{2}}{p}\right) - \frac{1}{p} < f(u_p) < f\left(u_p + \frac{\sqrt{2}}{p}\right) + \frac{1}{p},$$

ce qui donne, d'après (15):

(16) $$\left| f\left(u_p + \frac{\sqrt{2}}{p}\right) - f(u_p) \right| < \varepsilon.$$

D'après (15), (12), (14) et (11) nous trouvons:

$$\left| u_p + \frac{\sqrt{2}}{p} - x_0 \right| = |u_p - x_0| + \frac{\sqrt{2}}{p} < \delta_1 + \frac{\delta}{2} < \delta:$$

le nombre irrationnel $\xi = u_p + \frac{\sqrt{2}}{p}$ satisfait donc à l'inégalité (8) qui entraîne l'inégalité (9), c'est-à-dire

(17) $$\left| f\left(u_p + \frac{\sqrt{2}}{p}\right) - f(x_0) \right| < \varepsilon.$$

Les inégalités (16) et (17) donnent, d'après (14), l'inégalité (13).

Nous avons donc démontré que l'inégalité (12) entraîne pour tout x réel l'inégalité (13), ce qui prouve que la fonction $f(x)$ est continue pour x_0 (relativement à l'ensemble de tous les nombres réels).

La fonction $f(x)$ est donc continue (relativement à l'ensemble de tous les nombres réels) pour tont x irrationnel: c'est donc une fonction de classe $\leqslant 1$. La fonction $\varphi(y)$, inverse de $f(x)$, est donc une fonction représentable analytiquement. Or, comme nous avons démontré, $\varphi(y)$ ne peut être de classe $< \alpha$: donc $\varphi(y)$ est une fonction de classe $\geqslant \alpha$ (α étant $\geqslant 3$ il en résulte aussi que $f(x)$ ne peut être continue: c'est donc une fonction de classe 1). Nous avons donc démontré que pour tout nombre ordinal $\alpha < \Omega$ existe une fonction de classe $\geqslant \alpha$, inverse d'une fonction de classe 1.