Extension du théorème du Phragmèn-Brouwer aux ensembles non bornés.

Par

Stefan Mazurkiewicz (Varsovie).

1. R_2 désignant l'ensemble de points du plan euclidien et A étant un ensemble fermé, l'ensemble $R_2 - A$ est la somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable de domaines connexes sans points communs deux à deux. Nous dirons qu'un tel domaine est déterminé par A.

2. Le théorème de Phragmèn-Brouwer s'énonce ainsi: la frontière d'un domaine connexe, déterminé par un continu borné, est un continu [1].

3. Je me propose de démontrer qu'on peut supprimer dans cet énoncé le mot „borné".

4. La démonstration sera basée sur l'emploi de la transformation par rayons réciproques. z désignant le centre de la transformation, x un point arbitraire du plan différent de z, — enfin A un ensemble plan, je désignerais:

par $S_z(x)$ le point transformé du point x;

par $S_z(A)$ l'ensemble de tous les $S_z(x)$ pour $x \subset A$, $x \neq z$, dans le cas de A borné;

par $S_z(A)$ (l'ensemble de tous les $S_z(x)$ pour $x \subset A$, $x \neq z$) + le point z, dans le cas de A non borné.

5. Janiszewski a démontré le théorème suivant: si les continus bornés A et B ne découpent pas le plan et si l'ensemble $A \times B$ est vide ou bien-enchaîné, alors $A + B$ ne découpe pas le plan [2]. Or

[1] v. Brouwer: Beweis des Jordanschen Kurvensatzes. Math. Ann. 69.

[2] Janiszewski: Sur les coupures du plan faites par les continus (en polonais) Prace mat.-fiz. XXVI p. 48—52.

si l'on remplace dans la démonstration de Janiszewski les deux points quelconques par deux points déterminés a et b on obient l'énoncé suivant: si A et B sont deux continus bornés, si a et b désignent deux points de $R_2 - (A+B)$, si l'ensemble $A \times B$ est vide ou bien enchainé, enfin si A et B ne sont pas des $\mathfrak{S}(a, b; R_2)$, alors $A+B$ n'est pas un $\mathfrak{S}(a, b; R_2)$ [1].

6. Soit maintenant A un continu non borné, B un domaine déterminé par A.

Si $B + \mathfrak{F}(B) = R_2$, on aura nécessairement $\mathfrak{F}(B) = A$ et le théorème est démontré. Ecartons cette supposition. Donc:

$$R_2 - (B + \mathfrak{F}(B)) \neq 0. \tag{1}$$

On peut toujours supposer, que:

$$R_2 - (B + A) \neq 0 \tag{2}$$

en effet dans le cas contraire on aurait:

$$R_2 - (B + \mathfrak{F}(B)) \subset A \tag{3}$$

donc l'ensemble (1) étant un domaine A contiendrait un point intérieur a. Soit K l'intérieur du cercle de centre a et de rayon $\frac{1}{2}\varrho(a\, \mathfrak{F}(A))$. L'ensemble $A - K$ est comme on voit aisément un continu, — B est un domaine déterminé par ce continu et (2) est vérifiée si on remplace A par $A - K$.

7. (2) étant supposé verifiée, soit z un point arbitraire de $R_2 - (B + A)$. L'ensemble $S_z(A)$ est alors un continu borné contenant z, l'ensemble $S_z(B)$ — un domaine borné determiné par $S_z(B)$. On aura de plus:

$$\mathfrak{F}[S_z(B)] = S_z[\mathfrak{F}(B)] \tag{4}$$

et comme on peut appliquer le théorème de Phragmèn-Brouwer à $S_z(A)$, l'ensemble (4) est un continu. Si cet ensemble ne contient pas z, nous sommes au but car:

$$S_z[\mathfrak{F}[S_z(B)]] = S_z[S_z[\mathfrak{F}(B)]] = \mathfrak{F}(B) \tag{5}$$

est alors un continu. Donc nous supposerons:

$$z \subset \mathfrak{F}(S_z(B)). \tag{6}$$

[1] Le symbole $\mathfrak{S}(a, b; R_2)$ est défini dans ma note: „Sur un ensemble G_δ etc." Fund. Math. I, p. 62, § 6.

8. Supposons que $\mathfrak{F}(B)$ n'est pas continu, on a alors une décomposition:

$$\mathfrak{F}(B) = C_1 + C_2, \qquad C_1 \neq 0, \quad C_2 \neq 0, \tag{7}$$

$$C_1 \times C_2 = 0 \tag{8}$$

C_1 et C_2 étant fermés. Donc:

$$\mathfrak{F}(S_z(B)) = S_z(C_1) + S_z(C_2) \tag{9}$$

$S_z(C_1)$ et $S_z(C_2)$ étant férmés. (4) étant un continu on aura certainement:

$$S_z(C_1) \times S_z(C_2) \neq 0. \tag{10}$$

Mais d'après (8), $S_z(C_1) \times S_z(C_2)$ ne peut contenir que le points z. Donc:

$$S_z(C_1) \times S_z(C_2) = z. \tag{11}$$

Remarquons encore, que $S_z(C_1)$ et $S_z(C_2)$ sont continus. En effet supposons le contraire pour $S_z(C_1)$ p. e. On aura une décomposition:

(12) $S_z(C_1) = P_1 + P_2 \quad P_1 \times P_2 = 0 \quad P_1$ et P_2 fermés, non vides

z est contenu dans un seulement des deux ensembles P_1, P_2, p. e. dans le premier, et on a en vertu de (11)

$$S_z(C_2) \times P_2 \subset S_z(C_2) \times S_z(C_1) \times P_2 \subset z \times P_2 = 0 \tag{13}$$

$$[S_z(C_2) + P_1] \times P_2 = (S_z(C_2) \times P_2) + (P_1 \times P_2) = 0 \tag{14}$$

$$[S_z(C_2) + P_1] + P_2 = \mathfrak{F}(S_z(B)) \tag{15}$$

les ensembles $[S_z(C_2) + P_1]$ et P_2 étant férmés, non vides. Mais (14), (15) montrent que $\mathfrak{F}(S_z(B))$ n'est pas continu, contrairement à ce qui a été démontré.

9. L'ensemble $R_2 - [\mathfrak{F}(S_z(B)) + S_z(B)]$ se décompose en une infinité dénombrable ou en un nombre fini de domaines connexes sans points communs, désignons les par D_1, $D_2 \ldots$, dont les frontiéres sont des continus, car $\mathfrak{F}(S_z(B)) + S_z(B)$ est borné, donc on peut appliquer le théorème de Phragmén-Brouver. On a de plus:

$$\mathfrak{F}(D_n) \subset \mathfrak{F}(S_z(B)). \tag{16}$$

10. On a pour toute entier n, pour lequel D_n existe l'une des deux relations:

$$\mathfrak{F}(D_n) \subset S_z(C_1) \tag{17}$$
$$\mathfrak{F}(D_n) \subset S_z(C_2).$$

En effet, dans le cas contraire, d'après (11) les ensembles:

$$G_1 = \mathfrak{F}(D_n) \times S_z(C_1) \tag{18}$$

$$G_2 = \mathfrak{F}(D_n) \times S_z(C_2) \tag{19}$$

seraient des continus n'ayant que le point z en commun (d'après 11). On a, en vertu de (16), (19):

$$G_1 + G_2 = \mathfrak{F}(D_n). \tag{20}$$

Soit y un point arbitraire de $S_z(B)$, y' — un point de D_n; $\mathfrak{F}(D_n)$ est evidemment un $\mathfrak{S}(y\ y'; R_2)$. Soit y'' un point de $G_2 - G_1$, H l'intérieur du cercle de centre y'' et de rayon $\frac{1}{2}\varrho(y'', G_1)$. On a:

$$(S_z(B) + D_n + H) \times G_1 = 0 \tag{21}$$

et $S_z(B) + D_n + H$ est un domaine connexe, contenant y et y'. En effet, y'' est un point de $\mathfrak{F}(D_n)$, donc un point limite de D_n et en même temps un point de $\mathfrak{F}(S_z(B))$ donc — point limite de $S_z(B)$. H contient par suite de points de D_n et de points de $S_z(B)$.

Il en résulte l'existence d'un continu contenant y et y' et contenu dans $H + D_n + S_z(B)$; désignons le par L. Comme d'après (21)

$$L \times G_1 = 0 \tag{22}$$

on voit que G_1 n'est pas un $\mathfrak{S}(y, y'; R_2)$. De même on démontre que G_2 n'est pas un $\mathfrak{S}(y, y'; R_2)$. Comme $G_1 \times G_2 = z$ il en resulte d'après **5**, que $\mathfrak{F}(D_n)$ n'est pas un $\mathfrak{S}(y, y'; R_2)$. On arrive ainsi à une contradiction. Donc nous avons démontré, qu'on a necessairement une des deux relations (17).

11. Ces deux relations s'excluant, nous pouvons décomposer la suite $\{D_n\}$ en deux suites $\{U_k\}$, $\{V_k\}$, la premiére comprenant tous les D_n pour lesquels $\mathfrak{F}(D_n) \subset S_z(C_1)$ — la seconde les D_n pour lesquels $\mathfrak{F}(D_n) \subset S_z(C_2)$.

12. Posons:

$$M_1 = S_z(C_1) + \left(S_z(A) \times \sum_k U_k\right) \tag{23}$$

$$M_2 = S_z(C_2) + \left(S_z(A) \times \sum_k V_k\right). \tag{24}$$

On aura:

$$(25)\qquad M_1 + M_2 = \mathfrak{F}(S_z(B)) + \left(S_z(A) \times \sum_n D_n\right) =$$

$$= S_z(A) \times \left[S_z(B) + \mathfrak{F}(S_z(B)) + \sum D_n\right] = S_z(A) \times R_2 = S_z(A)$$

$$(26)\qquad M_1 \times M_2 = [S_z(C_1) \times S_z(C_2)] + \left[S_z(C_1) \times S_z(A) \times \sum_k V_k\right] +$$

$$+ \left[S_z(C_2) \times S_z(A) \times \sum_k U_k\right] + \left[S_z(A) \times \sum_{k,l} (U_k \times V_l)\right] = z.$$

13. Je dis que M_1 et M_2 *sont fermés*. Il suffit de le démontrer pour M_1. Soit p un point limite de M_1. Il existe une suite de points de M_1: $p_1, p_2 \ldots$ telle que:

$$(27)\qquad \lim_{m=\infty} p_m = p.$$

Si dans la suite $\{p_m\}$ il y a une infinité de points de $S_z(C_1)$, alors p est point limite de $S_z(C_1)$, donc, cet ensemble étant fermé on a:

$$(28)\qquad p \subset S_z(C_1) \subset M_1.$$

Si dans la suite $\{p_m\}$ il y a une infinité de points appartenant à un même U_k, alors

$$(29)\qquad p \subset U_k + \mathfrak{F}(U_k)$$

et comme on a $p \subset S_z(A)$ et $\mathfrak{F}(U_k) \subset S_z(C_1)$:

$$(30)\qquad p \subset (S_z(A) \times U_k) + S_z(C_1) \subset M_1.$$

Enfin, si les deux cas considérés sont en défaut, on peut à tout $\varepsilon > 0$ faire correspondre deux points p_{m_1}, p_{m_2} tels que:

$$(31)\qquad \begin{aligned} \varrho(p, p_{m_1}) &\leqq \varepsilon \\ \varrho(p, p_{m_2}) &\leqq \varepsilon \end{aligned}$$

$$(32)\qquad p_{m_1} \subset U_{k_1}, \quad p_{m_2} \subset U_{k_2}, \quad k_1 \neq k_2.$$

Le segment de droite $\overline{p_{m_1} p_{m_2}}$, reliant le point p_{m_1} intérieur à U_{k_1}, avec p_{m_2}, extérieur à U_{k_1} contient un point $p' \subset \mathfrak{F}(U_{k_1}) \subset S_z(C_1)$. On a evidement:

$$(33)\qquad \varrho(p, p') \leqq \varepsilon$$

ε étant quelconque on voit, que dans ce cas p est encore point limite de $S_z(C_1)$, ce qui entraîne (28). On voit ainsi que M_1 est fermé c. q. f. d.

14. (25), (26) entraînent:

$$A = S_z(S_z(A)) = S_z(M_1) + S_z(M_2) \tag{34}$$

$$S_z(M_1) \times S_z(M_2) = 0 \tag{35}$$

puisque la transformation rejette z à l'infini. D'après (7), (23), (24)

$$S_z(M_1) \supset S_z(S_z(C_1)) = C_1 \neq 0; \qquad S_z(M_2) \supset C_2 \neq 0 \tag{36}$$

(34), (35), (36) montrent. — $S(M_1)$ et $S_z(M_2)$ étant fermés d'après **13** — que A n'est pas un continu, contrairement à la supposition. L'hypothèse que $\mathfrak{F}(B)$ n'est pas continu entraîne une contradiction, donc $\mathfrak{F}(B)$ est un continu et le théorème de Phragmèn-Brouwer est démontré pour les continus non bornés. —