

Un problème sur les ensembles homogènes.

Par

Casimir Kuratowski (Varsovie).

Un ensemble de points E est dit *homogène* au sens de l'Analysis Situs, lorsque pour tous deux points a et b de E il existe une transformation biunivoque et bicontinue de l'ensemble E en lui-même, qui transforme a en b .

M. Knaster a posé le problème suivant:

Est-il vrai de tout ensemble homogène E que

(ω): *a et b étant deux points quelconques de E , il existe une transformation biunivoque et bicontinue de l'ensemble E en lui-même, qui transforme a en b et b en a simultanément.*

La condition (ω) est généralement réalisée, lorsqu'il s'agit des exemples les plus connus d'ensembles homogènes, tels qu'un ensemble fini, une circonférence, un espace euclidien à n dimensions. Il existe toutefois des ensembles homogènes qui ne la vérifient pas. J'en donne un exemple dans la première partie de cette Note. Dans la seconde j'envisage une classe d'ensembles homogènes qui remplissent la condition (ω) et je montre qu'en particulier, tous les ensembles homogènes linéaires la vérifient.

1. Soit A l'ensemble de tous les nombres de la forme $\frac{k}{3^n}$ ($0 < k \leq 3^n$), qui peuvent être écrits dans le système de numération à base 3 sans l'usage du chiffre 1. Soit A_i ($i \geq 1$) l'ensemble de tous les nombres x de A qui satisfont à l'inégalité: $\frac{2}{3^i} \leq x \leq \frac{1}{3^{i-1}}$. Le centre de symétrie de A_i est $\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{3^i}$.

Désignons par C_0 l'ensemble formé par toutes les demi-circon-

férences de centre $\frac{1}{2}$ qui passent au-dessus de l'axe X par tous les points de l'ensemble A . Soit C_i l'ensemble formé par les demi-circonférences de centre $\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{3^i}$ qui passent au-dessous de l'axe X par tous les points de l'ensemble A_i .

Envisageons l'ensemble $\sum_{i=0}^{\infty} C_i$ et supprimons y le point 0 de l'axe X . L'ensemble E ainsi obtenu ¹⁾ est celui que je m'avais proposé de définir: *il est homogène sans que la condition (ω) ne soit vérifiée.*

Pour mettre en évidence que l'ensemble E est homogène, considérons le cas, où a désigne le point $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ et b — le point $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$; le cas général, où a et b sont deux points quelconques de E , peut être traité d'une façon analogue.

Soit pour tout point p de E , $\alpha(p)$ l'angle formé par l'axe X avec le segment à extrémités p et $(\frac{1}{2}, 0)$. Le fonction $f(p)$ est définie comme suit:

1) si p est un point de C_0 , $f(p)$ est situé sur la circonférence qui est déterminée par p , et

$$\alpha(f(p)) = \frac{\alpha}{3} \quad \text{ou bien} \quad \alpha(f(p)) = 3\alpha - 360^\circ,$$

suivant que $\alpha \leq 135^\circ$ ou $\alpha > 135^\circ$;

2) pour tout autre point p de E , $f(p) = p$.

La fonction $f(p)$ est évidemment biunivoque et bicontinue, transforme l'ensemble E en lui-même et $f(a) = b$. C'est donc la fonction cherchée.

Passons à la démonstration qu'aucune fonction ne satisfait à la condition (ω).

Les demi-circonférences contenues dans E forment une suite infinie de manière que chacune d'elles a un seul point commun avec la suivante (d'ailleurs, la première est dépourvue du point 0 de l'axe X). On peut donc considérer E comme un ensemble

¹⁾ Dans ma „*Théorie des continus irréductibles entre deux points*“ on trouvera le dessin de cet ensemble (fig. 1).

ordonné linéairement. Tout point p de E détermine une décomposition de cet ensemble en deux semi-continus $A(p)$ et $B(p)$, dont le premier se compose du point p et des points qui précèdent p et le second contient p et tous les points qui le suivent. L'ensemble $A(p)$ renferme un nombre fini (≥ 0) de demi-circonférences, tandis que $B(p)$ en renferme toujours une infinité dénombrable.

Soient donc a et b deux points quelconques de E et supposons qu'il existe une transformation qui remplisse la condition (ω). Comme elle ne peut transformer $A(a)$ en $A(b)$, elle devrait bien le transformer en $B(b)$. Or, une transformation pareille est impossible, puisque l'ensemble $B(b)$ qui contient des continus de condensation ne peut être homéomorphe à $A(a)$ qui — étant homéomorphe à une demi-droite — n'en renferme aucun.

La condition (ω) n'est donc pas réalisée; de plus elle ne l'est pour aucun couple de points différents a, b .

2. Deux ensembles sont dits séparés, lorsque leur produit est vide et aucun d'eux n'admet de points limites de l'autre comme éléments. J'écris

$$X \varrho Y$$

pour exprimer que les ensembles X et Y sont séparés.

On démontre aisément les propriétés suivantes d'ensembles séparés:

- (1) les conditions $X \varrho Y$ et $Z \subset Y$ impliquent $X \varrho Z$;
- (2) les conditions $X \varrho Y$ et $X \varrho Z$ impliquent $X \varrho (Y + Z)$;
- (3) si la fonction $f(x)$ transforme l'ensemble $X + Y$ de façon biunivoque et bicontinue en $f(X + Y)$, la condition $X \varrho Y$ implique $f(X) \varrho f(Y)$;
- (4) si la fonction $f(x)$ transforme les ensembles séparés X et Y de façon biunivoque et bicontinue en ensembles séparés $f(X)$ et $f(Y)$, l'ensemble $X + Y$ est de même transformé en $f(X + Y)$ de façon biunivoque et bicontinue.

Définition. J'appelle un ensemble *nullepart connexe*, lorsque pour tous deux de ses points a et b on peut le décomposer en deux ensembles séparés A et B , dont l'un contient le point a et l'autre — le point b ¹⁾.

¹⁾ Cf. W. Sierpiński, *Sur les ensembles connexes et non-connexes*, Fund. Math. II, p. 81

Théorème 1. *Tout ensemble E homogène et nulleepart connexe satisfait à la condition (ω).*

Démonstration. L'idée de la démonstration consiste à décomposer l'ensemble E en trois ensembles séparés X , Y et Z assujettis aux conditions: X et Y sont homéomorphes, contiennent respectivement deux points donnés a et b de E et, de plus, b est l'image de a dans Y .

L'ensemble E étant nulleepart connexe, il existe deux ensembles A et B qui contiennent les points a et b respectivement et qui satisfont aux formules

$$(5) \quad E = A + B$$

$$(6) \quad A \varrho B.$$

E étant homogène, il existe une fonction $h(x)$ qui transforme l'ensemble E en lui-même d'une façon biunivoque et bicontinue et qui vérifie en outre l'égalité

$$(7) \quad h(a) = b.$$

D'après (5):

$$(8) \quad E = h(E) = h(A) + h(B)$$

et d'après (6) et (3),

$$(9) \quad h(A) \varrho h(B)$$

et comme, selon (8) et (9), $h(B) = E - h(A)$, on en déduit que

$$(10) \quad h(A) \varrho [E - h(A)].$$

Envisageons l'ensemble $h(A) - A$. Suivant (5), $h(A) - A \subset B$, donc — en vertu de (1) et (6) —

$$(11) \quad [h(A) - A] \varrho [A \times h(A)];$$

d'autre part, selon (1) et (10),

$$(12) \quad [h(A) - A] \varrho [E - h(A)].$$

Les formules (11) et (12) entraînent en raison de (2):

$$[h(A) - A] \varrho [A \times h(A) + E - h(A)],$$

mais

$$A \times h(A) + [E - h(A)] = E - [h(A) - A]$$

et par suite

$$(13) \quad [h(A) - A] \varrho [E - (h(A) - A)].$$

Démonstration. En tenant compte du théorème précédent, il suffit d'établir la condition (ω) dans l'hypothèse que l'ensemble E n'est pas nul part connexe. Cette hypothèse implique que E renferme un intervalle.

En effet, si l'existe aucun intervalle contenu dans E , on trouve entre tous deux points x et y ($x < y$) de E un point p de E , qui décompose cet ensemble en deux parties séparés: l'une, situé à gauche du point p , et l'autre située à sa droite.

Soit donc E un ensemble linéaire qui renferme un intervalle. Il s'en suit que, E étant homogène, tout point de E est situé sur un intervalle contenu dans E .

Comme la propriété (ω) est un invariant de l'Analysis Situs, il suffit d'envisager le cas où E est borné. Chaque point x de E détermine par suite un intervalle saturé (x_1, x_2) dépourvu de bornes, contenu dans E et contenant x . L'ensemble E étant une somme d'intervalles, la fonction $f(x)$ qui remplit la condition (ω) peut être définie aisément par voie arithmétique.

Si les points a et b ($a < b$) sont situés dans le même intervalle (donc $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$), on pose:

$$1^{\circ} \text{ pour } a_1 < x \leq a, \quad f(x) = (x - a_1) \frac{b - a_2}{a - a_1} + a_2$$

$$2^{\circ} \text{ ,, } a < x \leq b, \quad f(x) = a - x + b$$

$$3^{\circ} \text{ ,, } b < x < a_2, \quad f(x) = (x - b) \frac{a - a_1}{b - a_2} + a$$

$$4^{\circ} \text{ pour tout autre } x \text{ de } E, \quad f(x) = x.$$

Dans le cas contraire on pose:

$$1^{\circ} \text{ pour } a_1 < x \leq a, \quad f(x) = (x - a_1) \frac{b - b_1}{a - a_1} + b_1$$

$$2^{\circ} \text{ ,, } a < x < a_2, \quad f(x) = (x - a_2) \frac{b - b_2}{a - a_2} + b_2$$

$$3^{\circ} \text{ ,, } b_1 < x < b_2 \text{ et } x = f(p), \text{ où } a_1 < p < a_2: f(x) = p$$

$$4^{\circ} \text{ pour tout autre } x \text{ de } E, \quad f(x) = x.$$