Démonstration de quelques théorèmes fondamentaux sur les fonctions mesurables.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Le but de cette Note est de donner des démonstrations simples et naturelles des théorèmes connus de Borel, Fréchet, Vitali et Lusin sur les fonctions mesurables et d'établir dans le même ordre d'idées un résultat nouveau, notamment que *pour toute fonction mesurable presque partout finie $f(x)$ il existe deux fonctions semi-continues supérieurement et presque partout finies, dont la différence est presque partout égale à $f(x)$.*

Pour simplifier nos raisonnements, nous ne considérerons que les fonctions définies pour $0 \leqslant x \leqslant 1$: l'extension des théorèmes sur les fonctions définies pour tous les x réels [1]) et sur les fonctions à plusieurs variables ne présente pas de difficulté.

1. Lemme. Toute fonction d'une variable réelle $f(x)$, mesurable et presque partout finie dans l'intervalle $(0, 1)$, est bornée quand on néglige un ensemble de mesure ε, ε étant un nombre positif aussi petit que l'on veut.

Démonstration. Soit $f(x)$ une fonction mesurable et presque partout finie dans $(0, 1)$; soit V l'ensemble où $f(x)$ n'est pas finie. Posons $I = \mathrm{E}\,[0 \leqslant x \leqslant 1]$ et

$$E_n = \mathrm{E}\,[n-1 \leqslant |f(x)| < n], \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots)$$

nous aurons évidemment:

$$I = V + E_1 + E_2 + \ldots,$$

[1]) Sauf le théorème de Borel qui ne subsiste pas dans les intervalles non bornés.

donc, les ensembles E_n étant mesurables (puisque $f(x)$ est mesurable) et sans points communs deux à deux, on a d'après $m(V)=0$:

(1) $$1 = m(E_1) + m(E_2) + \dots$$

La série (1) étant convergente, il existe un indice n tel que

(2) $$m(E_{n+1}) + m(E_{n+2}) + \dots < \varepsilon.$$

Or, nous avons évidemment

$$Q = V + E_{n+1} + E_{n+2} + \dots = \mathrm{E}[|f(x)| \geqslant n],$$

donc, d'après (2) et $m(V)=0$:

$$m(Q) < \varepsilon$$

et

$$I - Q = \mathrm{E}[|f(x)| < n].$$

Nous avons donc $f(x) < n$ sauf dans l'ensemble Q de mesure $<\varepsilon$, c. q. f. d.

2. Soit maintenant $\varepsilon = 2\eta$ un nombre positif donné, $f(x)$ — une fonction mesurable, définie dans $I=(0, 1)$ et presque partout finie. D'après notre lemme, il existe un nombre A tel que $-A \leqslant f(x) < A$ dans $(0, 1)$ sauf dans un ensemble Q de mesure $<\eta$, et nous pouvons évidemment poser $A = p\eta$, p etant un nombre naturel. Posons

$$P_k = \mathrm{E}[(k-1)\eta \leqslant f(x) < k\eta], \qquad (1-p \leqslant k \leqslant p);$$

nous aurons évidemment

(3) $$I = Q + P_{1-p} + P_{2-p} + \dots + P_p.$$

L'ensemble P_k étant mesurable, il existe, comme on sait, un ensemble fermé $F_k \subset P_k$, tel que

(4) $$P_k = F_k + R_k \quad \text{et} \quad m(R_k) < \frac{\eta}{2p}.$$

Posons

$$F = F_{1-p} + F_{2-p} + \dots + F_p$$

— ce sera évidemment un ensemble fermé et nous aurons, d'après (3) et (4):

$$I - F = Q + R_{1-p} + R_{2-p} + \dots + R_p,$$

donc, d'après (4) et $m(Q) < \eta$:

$$m(I-F) < \eta + 2p \cdot \frac{\eta}{2p} = 2\eta = \varepsilon.$$

Les ensembles fermés $F_{1-p}, F_{2-p}, \ldots F_p$ étant sans points communs deux à deux, nous pouvons définir la fonction $\varphi(x)$ de façon qu'elle soit égale à $(k-1)\eta$ sur F_k $(k=1-p, 2-p, \ldots, p)$ et linéaire dans les intervalles contigus à l'ensemble fermé F: ce sera évidemment une fonction continue dans l'intervalle I et nous aurons pour tout x appartenant à F:

$$(5) \qquad 0 \leqslant f(x) - \varphi(x) < \eta,$$

puisque dans F_k nous avons $\varphi(x) = (k-1)\eta$ et $(k-1)\eta \leqslant f(x) < k\eta$.

Nous avons donc dans I l'inégalité (5), sauf peut-être dans l'ensemble $I-F$ de mesure $< \varepsilon$.

D'après le théorème connu de Weierstrass, il existe pour la fonction continue $\varphi(x)$ un polynome $P(x)$ tel que

$$|\varphi(x) - P(x)| < \eta \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Moyennant (5) nous obtenons l'inégalité

$$|f(x) - P(x)| < 2\eta = \varepsilon$$

pour tous les x appartenant à F. Nous avons donc démontré ce

Théorème de M. Borel [1]): *Toute fonction mesurable et presque partout finie dans* (0, 1) *est égale à un polynome à* ε *près, quand on néglige certain ensemble de mesure* $< \varepsilon$, ε *étant aussi petit que l'on veut* [2]).

3. Soit $f(x)$ une fonction mesurable, presque partout finie dans (0, 1). D'après le théorème démontré, il existe pour tout n naturel

[1]) Cf. E. Borel: *C. R.* t. 154, p. 415, note du 12 février 1912 (L'énoncé primitif de M. Borel était pour les fonctions définissables analytiquement).

[2]) Remarquons qu'on pourrait sans peine *définir une loi* d'après laquelle à toute fonction mesurable $f(x)$ et tout nombre positif ε correspondrait un polynome $P(x)$ égal à $f(x)$ à ε près pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ sauf pour les valeurs de x formant un ensemble de mesure $< \varepsilon$. Soit, en effet, S une suite infinie formée de tous les polynomes à coefficients rationnels (nous savons, comme on sait, définir effectivement une telle suite): il suffira faire correspondre à la fonction $f(x)$ et au nombre ε le premier polynome de la suite S qui diffère de $f(x)$ à moins que de ε quand on néglige certain ensemble de mesure $< \varepsilon$.

un ensemble fermé $H_n \subset I$ tel que

(6) $$m(I - H_n) < \frac{1}{2^n}$$

et un polynome $P_n(x)$ tel que

(7) $$|f(x) - P_n(x)| < \frac{1}{2^n} \quad \text{sur} \quad H_n.$$

Posons

(8) $$S = H_1 H_2 H_3 \ldots + H_2 H_3 H_4 \ldots + H_3 H_4 \ldots + \ldots;$$

nous aurons, pour tout n naturel

$$I - S \subset I - H_n H_{n+1} H_{n+2} \ldots \subset (I - H_n) + (I - H_{n+1}) + \ldots,$$

donc, d'après (6):

$$m(I - S) < \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots = \frac{1}{2^{n-1}}$$

pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, ce qui donne

$$m(I - S) = 0.$$

Or on voit sans peine que

(9) $$\lim_{n \to \infty} P_n(x) = f(x) \quad \text{sur} \quad S.$$

En effet, soit x un nombre de S: d'après (8) il existe donc un indice $q = q(x)$ tel que x appartient à l'ensemble $H_q H_{q+1} H_{q+2} \ldots$: nous avons donc, d'après (7):

(10) $$f(x) - P_n(x) < \frac{1}{2^n} \quad \text{pour} \quad n \geqslant q(x),$$

ce qui donne $\lim P_n(x) = f(x)$. Nous obtenons ainsi le

Théorème de M. Fréchet[1]): *Toute fonction mesurable définie et presque partout finie dans* (0, 1) *est limite d'une suite infinie de polynomes, sauf peut-être dans un ensemble de mesure nulle*[2]).

[1]) M. Fréchet: *C. R.* note du 20 mars 1905; *Rendiconti Palermo* 22 (1906 p. 17 (Le théorème est énoncé pour les fonctions rentrant dans la classification de M. Baire).

[2]) On pourrait définir une loi d'après laquelle à toute fonction mesurable $f(x)$ correspondrait une suite bien déterminée de polynomes $P_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ convergente presque partout vers $f(x)$; cf. la note [3]), p. 316.

4. Posons maintenant $p_1(x) = P_1(x)$, $p_n(x) = P_n(x) - P_{n-1}(x)$ pour $n > 1$. Nous aurons

$$p_1(x) + p_2(x) + \dots + p_n(x) = P_n(x) \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \dots;$$

la série de polynomes

$$(11) \qquad p_1(x) + p_2(x) + p_3(x) + \dots$$

a donc sur S, d'après (9), la fonction $f(x)$ pour somme.

Soit x un nombre de S: nous avons, d'après (10):

$$|p_{n+1}(x)| = |P_{n+1}(x) - f(x) + f(x) - P_n(x)| \leqslant$$
$$\leqslant |P_{n+1}(x) - f(x)| + |f(x) - P_n(x)| < \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{n-1}}$$

pour $n \geqslant q(x)$; il en résulte tout de suite que la série (11) converge absolument sur S. Nous obtenons ainsi ce

Théorème [1]): *Si $f(x)$ est une fonction mesurable, définie et presque partout finie dans* (0, 1), *il existe une série de polynomes $\Sigma p_n(x)$ absolument convergente vers la fonction $f(x)$ pour tous les points de l'intervalle* (0, 1) *sauf peut-être un ensemble de mesure nulle.*

5. Posons maintenant

$$(12) \qquad \begin{cases} \varphi_n(x) = 0, & \psi_n(x) = -p_n(x) \quad \text{si} \quad p_n(x) \geqslant 0, \\ \varphi_n(x) = p_n(x), & \psi_n(x) = 0 \quad \text{si} \quad p_n(x) < 0, \end{cases}$$

$$(13) \qquad \Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x), \quad \Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x).$$

Les fonctions $\varphi_n(x)$ et $\psi_n(x)$ étant $\leqslant 0$, quel que soit l'indice n, les séries (13) ont pour tout x de (0, 1) les sommes déterminées: finies où $= -\infty$. Comme limites de fonctions continues non croissantes, les fonctions $\Phi(x)$ et $\Psi(x)$ sont semi-continues supérieurement.

Or, la série (11) étant absolument convergente sur S, on prouve sans peine que les séries (13) convergent sur S [2]): les fonctions $\Phi(x)$ et $\Psi(x)$ sont donc finies sur S. Or, nous avons évidemment, d'après (13) et (12), la série (11) ayant sur S $f(x)$ pour somme,

$$f(x) = \Phi(x) - \Psi(x) \quad \text{sur} \quad S.$$

[1]) N. Lusin: *C. R.* t. 154 (1912) p. 1689; aussi *Thèse* (*Intégrale et série trigonométrique*, en russe) Moscou 1915, p. 26.

[2]) Voir *Fund. Math.* t. II, p. 16.

Nous obtenons ainsi ce

Théorème [1]): *Si $f(x)$ est une fonction mesurable, définie et presque partout finie dans* $(0, 1)$, *il existe deux fonctions semi-continues supérieurement $\Phi(x)$ et $\Psi(x)$, définies et presque partout finies dans* $(0, 1)$, *telles qu'on a presque partout $f(x) = \Phi(x) - \Psi(x)$* [2]).

On en déduit tout de suite la proposition suivante:

Toute fonction mesurable est une différence de deux fonctions (finies) dont chacune est semi-continue supérieurement, quand on néglige certain ensemble de mesure nulle.

6. Reprenons maintenant le théorème de M. Fréchet. En conservant les notations du § 3, définissons la fonction $f_n(x)$ comme égale à $P_n(x)$ sur l'ensemble fermé $H_n\, H_{n+1} \dots$ et comme égale à zéro sur le complémentaire de cet ensemble. On voit sans peine que $f_n(x)$ sont des fonctions de classe $\leqslant 1$ et que nous aurons

$$\lim_{n=\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{sur} \quad S,$$

(puisque pour tout x de S on a $f_n(x) = P_n(x)$ pour $n \geqslant p(x)$). On obtient ainsi le

Théorème de Vitali [3]): *Toute fonction mesurable, définie et presque partout finie dans* $(0, 1)$ *est presque partout égale à une fonction de classe* $\leqslant 2$.

7. Soit maintenant ε un nombre positif donné. Il existe, comme nous savons (voir notre démonstration du théorème de M. Borel), pour tout n naturel un ensemble fermé $F_n \subset I$, tel que

$$m(I - F_n) < \frac{\varepsilon}{2^n} \tag{14}$$

[1]) Ce théorème est nouveau.

[2]) Les fonction $\Phi(x)$ et $\Psi(x)$ (toutes les deux de classe $\leqslant 1$) pouvant admettre des valeurs infinies (même si $f(x)$ est bornée), on ne peut pas affirmer que leur différence est toujours une fonction de classe $\leqslant 1$ dans $(0, 1)$. Cf. C. Burstin: *Monatshefte für Math. u. Phys.* 27 (1916) p. 163, note [1]); C. Carathéodory: *Vorl. üb. reelle Funktionen*, Leipzig und Berlin 1918, p. 407 (§ 370).

Remarquons qu'on pourrait faire correspondre à toute fonction mesurable $f(x)$ deux fonctions $\Phi(x)$ et $\Psi(x)$ bien déterminées satisfaisant à l'énoncé de notre théorème.

[3]) G. Vitali: *Rend. Lomb.* 38 (1905) p. 599.

et une fonction continue $\varphi_n(x)$ telle que

$$(15) \qquad 0 \leqslant f(x) - \varphi_n(x) < \frac{\varepsilon}{2^n} \quad \text{sur } F_n.$$

Posons:

$$R = (I - F_1) + (I - F_2) + \dots;$$

nous aurons, d'après (14):

$$(16) \qquad m(R) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \dots = \varepsilon.$$

Or, d'après (15), nous avons à plus forte raison:

$$0 \leqslant f(x) - \varphi_n(x) < \frac{\varepsilon}{2^n} \quad \text{sur } P = I - R$$

(puisque $I - R \subset F_n$): la suite de fonctions continues $\varphi_n(x)$ converge donc uniformément vers $f(x)$ sur P. Donc $f(x)$ est une fonction continue sur P et $m(I - P) = m(R) < \varepsilon$ (d'après (16)). Nous avons ainsi le

Théorème de M. Lusin [1]: *Toute fonction mesurable définie et presque partout finie dans* $(0, 1)$ *est continue, quand on néglige un ensemble de mesure* $< \varepsilon$, ε *étant aussi petit que l'on veut.*

Remarquons qu'en s'appuyant sur le théorème de M. Lebesgue sur la densité des ensembles on peut déduire sans peine du théorème de M. Lusin le théorème de M. Denjoy d'après lequel *toute fonction mesurable est presque partout approximativement continue*. En effet, soit $f(x)$ une fonction mesurable (dans I). D'après le théorème de M. Lusin, $f(x)$ est continue sur un ensemble (mesurable) P tel que $m(I - P) < \varepsilon$. Or, d'après le théorème de M. Lebesgue, presque tous les points de P sont points de densité de P: soit E leur ensemble. La fonction $f(x)$ est donc approximativement continue (relativement à I) pour tous les points x de E [2]. Les points de I où $f(x)$ n'est pas approximativement continue appartiennent donc à l'ensemble $I - E = (I - P) + (P - E)$ de mesure $< \varepsilon$ (puisque $m(P - E) = 0$). Or, ε étant aussi petit que l'on veut, il en résulte que $f(x)$ est presque partout approximativement continue dans I.

[1] N. Lusin: *C. R.* 154 (1912) p. 1688; Recueil de la Soc. math. de Moscou (*Matiematitschesky Sbornik*) 28 (1911) p. 266 ss. (en russe), aussi *Thèse*. p. 21. Une démonstration élémentaire du théorème de M. Lusin a été donné par moi en 1916 dans *Tôhoku Math. Journ.* Vol. 10, p. 81.

[2] Une fonction $f(x)$ est dite *approximativement continue* au point x_0 (relativement à I) lorsqu'il existe un ensemble $E(x_0)$ pour lequel x_0 est un point de densité et tel que $f(x)$ est continue au point x_0 sur $E(x_0)$.

8. Nous finirons par énoncer la proposition suivante, qui peut être regardée comme une extension du théorème de M. Borel aux fonctions quelconques et dont la démonstration pourrait être achevée en modifiant convenablement celle que nous avons donnée pour le théorème de M. Borel:

Toute fonction d'une variable réelle (mesurable ou non) dans $(0, 1)$ est égale à un polynôme à ε près, quand on néglige certain ensemble de mesure intérieure $< \varepsilon$, ε étant aussi petit que l'on veut.

Reconnaissance du droit de l'auteur.

Par

Alexandre Rajchman (Varsovie).

M. L. Tonelli (auquel je m'empresse d'exprimer mes remerciements) vient d'informer la Rédaction de ce journal que le théorème sur la dérivabilité terme à terme des séries de fonctions monotones que je publie dans ce volume (et dont le cas particulies avait été publié dans le volume précédent de ce journal, p. 50, sous le titre „*Une remarque sur les fonctions monotones*") n'est pas nouveau. Il appartient à M. G. Fubini (Rend. R. Academia dei Lincei, 1915 (1e Sem) pp. 204—206). M. L. Tonelli (ibid. 1916 (1e Sem) pp. 22—30 et 85—91) a publié des généralisations intéressantes de ce résultat.

Je regrette que l'absence des journaux étrangers du temps de la guerre ne m'a pas permis de suivre les travaux de MM Fubini et Tonelli sur ce sujet.