Les fonctions de classe 1 et les ensembles connexes punctiformes.

Par

C. Kuratowski et W. Sierpiński (Varsovie).

I.

Théorème 1. *La condition nécessaire et suffisante pour que l'image d'une fonction $f(x)$* [1] *soit punctiforme, est que $f(x)$ soit pantachiquement discontinue.*

Démonstration. La condition est nécessaire, car si $f(x)$ est continue dans un intervalle (a, b), l'image I de $f(x)$, pour $a \leqslant x \leqslant b$, est un continu (notamment un arc simple). Nous allons prouver que cette condition est suffisante.

Supposons, par contre, que l'image I d'une fonction $f(x)$ pantachiquement discontinue contienne un continu (borné) C. Soient $[a, f(a)]$ et $[b. f(b)]$ deux points de C. Soit $a < b$.

La fonction $f(a)$ étant, par hypothèse, discontinue à un x_0 situé entre a et b, il existe une suite $\{x_n\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ telle que $a < x_n < b$,

$$\lim_{n=\infty} x_n = x_0 \tag{1}$$

$$\lim_{n=\infty} f(x_n) \neq f(x_0). \tag{2}$$

Or, chaque point $[x_n, f(x_n)]$ appartient à C, car autrement la droite $x = x_n$ couperait le plan entre les points $[a, f(a)]$ et $[b, f(b)]$ de C sans qu'elle rencontre C. Par conséquent, le point $[x_0, \lim_{n=\infty} f(x_n)]$, qui est, selon (1), le point limite des points $[x_n, f(x_n)]$, est également

[1] Nous ne considérons dans cette note que des fonctions réelles d'une variable réelle.

situé, sur C, donc sur I. Mais alors il coïncide avec $[x_0, f(x_0)]$, ce qui contredit la formule (2).

Théorème 2. *La condition nécessaire et suffisante pour que l'image I d'une fonction $f(x)$ de classe 1*[1]) *soit un ensemble connexe, est que, pour chaque x_0, il existe deux suites $\{s_n\}$ et $\{t_n\}$ telles que*

$$s_n < x_0 < t_n, \quad \lim_{n=\infty} s_n = x_0 = \lim_{n=\infty} t_n, \quad \lim_{n=\infty} f(s_n) = f(x_0) = \lim_{n=\infty} f(t_n).$$

Démonstration. La condition est nécessaire. Supposons, en effet, que $\{x_n\}$ étant une suite quelconque qui converge vers x_0 de gauche (resp, de droite), $f(x_n)$ ne converge jamais vers $f(x_0)$. En désignant par I_1 l'image de $f(x)$, pour $x < x_0$ (resp. pour $x \leqslant x_0$), et par I_2 l'image de $f(x)$ pour $x \geqslant x_0$ (resp. pour $x > x_0$), on obtient une décomposition de l'image I de $f(x)$ en deux ensembles séparés I_1 et I_2 (c'est-à-dire: en deux ensembles disjoints, dont aucun ne contient de point limite de l'autre). I n'est donc pas connexe.

La condition est suffisante. Supposons qu'elle soit réalisée et qu'il existe une décomposition de I en deux ensembles séparés (non vides) A_1 et A_2. Soient B_1 et B_2 les projections de ces ensembles sur l'axe X. Donc $B_2 = X - B_1$.

Soit C l'ensemble des x, où $f(x)$ est continue. Considérons, pour un $c \varepsilon C$, le point $[c, f(c)]$ est posons $c \varepsilon B_1$ (le raisonnement pour $c \varepsilon B_2$ serait tout à fait analogue). Le point $[c, f(c)]$ appartenant à A_1, il est situé à une distance > 0 de A_2. On en conclut que, — $f(x)$ étant continue à c — il existe un intervalle (fermé) contenant c et contenu dans B_1. Nous allons montrer que parmi ces intervalles il existe — pour un c donné — l e p l u s g r a n d (borné ou non borné).

En effet, s'il n'en est pas ainsi, il existe un intervalle (a, b) dont chaque point, excepté a ou b, appartient à B_1. Soit $a \varepsilon B_2$. Il existe, par hypothèse. une suite $\{t_n\}$ telle que $a < t_n < b$, $\lim_{n=\infty} t_n = a$

[1]) Il est à remarquer que la condition du théorème 2, tout en étant n é c e s s a i r e pour le cas de fonction $f(x)$ tout à fait arbitraire, elle n'est pas en général s u f f i s a n t e pour les fonctions qui ne sont pas de classe 1. Considérons, par exemple, la fonction $f(x)$ définie, pour $0 < x < 1$, comme suit: $f(x) = 0$, lorsqu'il existe un développement ternaire de x admettant le chiffre 1, et $f(x) = 1$ dans le cas contraire.

L'image de cette fonction n'est pas connexe, bien que $f(x)$ satisfasse a la condition du théorème. Comme on voit, $f(x)$ est une fonction punctuellement discontinue de classe 2.

et $\lim\limits_{n=\infty} f(t_n) = f(a)$. Les points $[t_n, f(t_n)]$ appartiennent donc à A_1 et convergent vers $[a, f(a)]$, qui appartient à A_2. Ceci contredit l'égalité $A_1' A_2 = 0$. Il en est de même, si $b \varepsilon B_2$.

Ceci établi, soit, pour $c \varepsilon C$, R_c le plus grand intervalle contenant c et contenu dans B_1 ou dans B_2 (suivant que $c \varepsilon B_1$ ou $c \varepsilon B_2$). Posons $S = \sum\limits_{c \varepsilon C} R_c$ et envisageons l'ensemble T des bornes de tous les intervalles R_c.

$f(x)$ étant, par hypothèse, une fonction de classe 1, elle est punctuellement discontinue. Donc $C' = X$ et comme $C \subset S$, on a $S' = X$. On en conclut que

(3) $$S + T' = X,$$

et comme dans l'entourage de chaque point de T il y a des points de $X - S$, donc de T', l'ensemble T est dense-en-soi.

L'ensemble T' étant parfait, il existe — selon un théorème connu de Baire[1]) — un point d de T' où la fonction $f(x)$ est continue relativement à l'ensemble T'. Soit $d \varepsilon B_1$. Il existe, par conséquent un intervalle Z contenant d à son intérieur et tel que

(4) $$ZT' \subset B_1.$$

Nous allons montrer que

(5) $$Z \subset B_1.$$

En effet, d'après (3), $Z = ZS + ZT'$. Or, si $x \varepsilon ZS$, x est situé dans un intervalle R_c et comme Z *non* $\subset R_c$, l'une au moins des bornes de R_c appartient à Z, donc — selon (4) — à B_1. Mais, si une borne de R_c appartient à B_1, l'intervalle R_c y est contenu tout entier. Donc $x \varepsilon B_1$ et $ZS \subset B_1$. Ceci donne, en vortu de (4), l'inclusion (5).

D'autre part, le point d étant un point limite des bornes des intervalles R_c, il existe un intervalle R_{c_0} situé dans Z et plus petit que Z. Selon (5), R_{c_0} n'est donc pas le plus grand intervalle contenant c_0 et contenu dans B_1. Ceci contredit la définition des R_c.

Ainsi, l'hypothèse que I n'est pas connexe implique une contradiction. C. Q. F. D.

Les théorèmes 1 et 2 montrent que pour construire une fonction de classe 1 dont l'image soit connexe punctiforme, il faut et il

[1]) Baire démontra dans sa Thèse (1899) qu'une fonction de classe 1 admet des points de continuité dans chaque ensemble parfait (relatifs à cet ensemble).

suffit de connaître un exemple de fonction de classe 1 qui satisfasse aux conditions énoncées dans ces théorèmes. Il est aisé de voir que ces conditions sont réalisées par la fonction de classe 1:

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(x - r_n)}{2^n}, \tag{6}$$

où $\{r_n\}$ désigne la suite de tous les nombres rationnels (différents) et

$$\varphi(x) = \sin\frac{1}{x}, \quad \text{pour} \quad x \neq 0, \quad \text{et} \quad \varphi(0) = 0.$$

L'image I de la fonction $\psi(x)$ est donc un ensemble connexe et punctiforme. Il est, en outre, *un ensemble G_δ* [1]), comme l'image d'une fonction de classe 1 [2]). On remarquera aussi que, si l'on considère la fonction $\psi(x)$ dans un intervalle (a, b), son image I *est connexe irréductible* entre les points $[a, \psi(a)]$ et $[b, \psi(b)]$ [3]), c'est-à-dire: aucun sous-ensemble connexe de I ne contient ces points simultanément. En effet, cette propriété est commune à tous les ensembles connexes qui peuvent être représentés comme images de fonctions $f(x)$ pour $a \leqslant x \leqslant b$. Car, si l'on omet un point quelconque de I à abscisse située entre a et b, on peut couper le plan entre $[a, f(a)]$ et $[b, f(b)]$ à l'aide d'une droite parallèle à l'axe des y qui ne rencontre pas l'ensemble I.

[1]) Un autre exemple d'un ensemble G_δ connexe et punctiforme a été donné par M. Mazurkiewicz dans le vol. I de ce Journal, p. 61. Il y était question de construire un ensemble G_δ qui ne soit homéomorphe à aucun ensemble linéaire. L'ensemble I peut en servir d'exemple, car aucun ensemble connexe linéaire n'est punctiforme.

[2]) Voir W. Sierpiński: *Comptes Rendus* t. 170, p. 919 et *Sur les images des fonctions représentables analytiquement*, Fund. Math. II, p. 77.

[3]) Un exemple intéressant d'un ensemble connexe punctiforme et irréductible a été donné récemment par M. Vietoris (*Stetige Mengen*, Monatshefte für Math. u. Phys. XXXI, p. 202, 1921). C'est notamment l'image de la fonction

$$\omega(x) = \limsup \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}, \qquad x = (0, a_1\, a_2 \ldots a_n \ldots)_2.$$

Cet ensemble est, de plus, dense dans une portion du plan.

Pour que l'image d'une fonction $f(x)$ jouisse de cette dernière propriété, il faut que la fonction soit totalement discontinue. Elle ne peut donc être de classe 1, ainsi que son image ne peut être un ensemble G_δ.

La fonction $\omega(x)$ est de classe 2; son image est un $F_{\sigma\delta}$.

Pour des exemples d'ensembles connexes irréductibles punctiformes, voir aussi: Knaster et Kuratowski, *Sur les ensembles connexes*, Fund. Math. II, p. 245.

II.

Nous dirons que le point $[x, y]$ du plan est situé **au-dessus** ou **au-dessous** de l'image I de $\psi(x)$ conformément à ce que $y > \psi(x)$ ou bien $y < \psi(x)$.

Lemme. L'image I de la fonction $\psi(x)$ (définie par la formule (6)) coupe le plan entre les points situés au-dessus et au-dessous de I.

Démonstration[1]. Supposons, par contre, qu'il existe deux points $[x_1, y_1]$ et $[x_2, y_2]$ tels que

(7) $$y_1 > \psi(x_1) \quad \text{et} \quad y_2 < \psi(x_2)$$

et que ces points soient situés sur un continu (borné) C satisfaisant à l'égalité

(8) $$CI = 0.$$

Soit R un rectangle formé par les droites $x = a$, $x = b\,(a < b)$ $y = c$, $y = d\,(c > d)$ qui renferme le continu C et désignons par K le continu formé par C et par les deux segments $x = x_1$, $y_1 \leqslant y \leqslant c$ et $x = x_2$, $y_2 \geqslant y \geqslant d$. Selon (7) et (8), on a

(9) $$KI = 0.$$

Comme le continu K unit deux côtés opposés du rectangle R, tout en étant situé dans R, il coupe ce rectangle entre les points $[a, \psi(a)]$ et $[b, \psi(b)]$, qui sont situés sur les deux autres côtés opposés de R[2]. Par conséquent, l'intérieur du rectangle est décomposé par K en régions dont l'une, soit U, contient des points voisins de $[a, \psi(a)]$ et une autre, soit V, contient des points voisins de $[b, \psi(b)]$.

Or, soit J l'image de $\psi(x)$, pour $a < x < b$. J contient donc des points des régions U et V et, d'après (9), J ne contient aucun

[1] L'idée de cette démonstration est due à M. **Zarankiewicz**. Elle peut être appliquée au cas de fonction arbitraire dont l'image est connexe.

[2] Nous nous appuyons sur cette proposition: si un continu K est situé dans un rectangle R et unit deux côtés opposés de R, il coupe ce rectangle entre chaque couple de points situés sur les deux autres côtés opposés de R.

Pour démontrer cette proposition, on représente K comme l'ensemble d'accumulation d'une suite infinie de lignes polygonales qui traversent le rectangle d'un côté opposé à l'autre. Notre proposition étant vraie — comme on reconnait aisément — pour le cas de ces lignes, elle est encore vraie pour leur ensemble d'accumulation (Voir: **Janiszewski**, *Sur les coupures du plan* (en polonais). Prace Mat.-Fiz. t. XXVI p. 54, Varsovie 1913).

point de leurs frontières. Ceci contredit la propriété de J d'être un ensemble connexe.

Notre lemme est donc établi.

Désignons par I_t, pour un paramètre réel t, l'image de la fonction: $y = t + \psi(x)$. Nous allons prouver que l'ensemble

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} I_{r_n} \tag{10}$$

est, ainsi que son complémentaire $C(S)$, un ensemble punctiforme.

1 $C(S)$ est punctiforme. Supposons, par contre, qu'il existe un continu Q situé dans $C(S)$. Nous pouvons admettre évidemment que Q est borné. L'ensemble I étant, comme nous avons démontré auparavant, un ensemble punctiforme, il n'existe aucun I_t qui contienne Q tout entier. Soient donc p et q deux points de Q situés sur I_t et I_u respectivement, avec $t < u$. Soit r_n un nombre rationnel tel que $t < r_n < u$. Le point p est donc situé au-dessous de I_{r_n} tandis que q en est situé au-dessus. On a donc, selon le lemme, $Q I_{r_n} \neq 0$ et, à plus forte raison, $QS \neq 0$. Q n'est donc pas contenu dans $C(S)$.

2. S est punctiforme. En effet, t désignant un nombre irrationnel quelconque, l'ensemble

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} I_{t+r_n}$$

est contenu dans $C(S)$. L'ensemble $C(S)$ étant punctiforme, T l'est donc à plus forte raison. Or, S étant superposable avec T, S est également punctiforme.

Ainsi, *le plan se trouve décomposé en deux ensembles punctiformes: S et $C(S)$* [1].

Le complémentaire d'un ensemble punctiforme étant connexe [2], on en conclut que ces deux ensembles sont connexes.

[1] Les premiers exemples de la décomposition du plan en deux ensembles punctiformes ont été donnés par MM. Mazurkiewicz et Sierpiński dans le *Bull. de l'Acad. des Sc.* de Cracovie, 1913.

[2] Cf. Sierpiński: *Fund. Math.* t. I, p. 9, t. II, p. 94; Knaster et Kuratowski: ibid. p. 236.

III.

Au point de vue de la classification d'ensembles de Borel, il est important de savoir décomposer le plan en deux ensembles punctiformes qui soient les plus simples possibles relativement à cette classification. C'est à ce point de vue, que se place M. Mazurkiewicz dans son article: *Sur la décomposition d'un domaine en deux sous-ensembles punctiformes,* publié dans ce volume. Les résultats qu'il obtient sont les suivants: La décomposition ne peut être de la forme

$$F_\sigma + G_\delta \tag{11}$$

ni, à plus forte raison, ($F_\sigma + F_\sigma$ ou $G_\delta + G_\delta$). Cependant elle peut) être de la forme

$$F_{\sigma\delta} + G_{\delta\sigma} \tag{12}$$

et M. Mazurkiewicz en donne un moyen de réaliser une décomposition de ce genre.

Toutefois, il reste non résolu le problème de la décomposition qui soit plus compliquée que (11) mais plus simple que (12). Telle serait — au point de vue de classes de Borel — une décomposition en deux ensembles punctiformes qui, par exemple, s'obtiendraient à l'aide d'un nombre fini d'additions et multiplications effectuées sur des ensembles F_σ et G_δ.

Le résultat, que nous nous proposons d'établir, est le suivant:

En modifiant la décomposition du plan $P = S + C(S)$, *nous allons donner une décomposition en deux ensembles punctiformes de la forme*

$$(F_\sigma \times G_\delta) + (F_\sigma + G_\delta)\,^{1)} \tag{13}$$

et nous allons prouver que la décomposition de la forme (13) *est la plus avantageuse au point de vue de classes de Borel.*

En ce qui concerne la décomposition $P = S + C(S)$, on reconnait sans peine qu'elle est de la forme

$$(F_\sigma \times G_\delta + F_\sigma) + (F_\sigma \times G_\delta + G_\delta)$$

mais qu'elle n'est pas de la forme (13).

[1]) Nous dirons qu'un ensemble est un $F_\sigma \times G_\delta$, s'il est produit d'un F_σ et d'un G_δ. Un tel ensemble est en même temps un $F_{\sigma\varrho}$, c'est-à-dire une différence de deux F_σ et inversement.

Pour prouver que la forme (13) est la plus simple forme de décomposition il s'agit de démontrer qu'il n'existe aucune décomposition du plan en deux ensembles punctiformes dont chacun soit $F_\sigma \times G_\delta$ et $F_\sigma + G_\delta$ simultanément. Ceci revient à établir ce

Théorème. *Il n'existe aucune décomposition du plan P en deux ensembles punctiformes de la forme*

$$(F_\sigma + G_\delta) + (F_\sigma + G_\delta). \tag{14}$$

Démonstration. Supposons, par contre, que

$$P = (A+B) + (C+D)$$

et que A et C sont des F_σ, B et D des G_δ, $(A+B)$ et $(C+D)$ des ensembles disjoints punctiformes.

On peut poser, en outre, $AB = 0 = CD$, car on peut toujours remplacer A par $A-B$ et C par $C-D$, qui sont également des F_σ.

Les ensembles A et C étant des ensembles F_σ punctiformes, ils sont de première catégorie dans le plan (c'est-à-dire: chacun d'eux est une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles non denses dans le plan). Or, le plan n'étant pas de première catégorie, un au moins des ensembles B ou D n'est pas de première catégorie. Soit B cet ensemble.

Posons: $E = A + B + C$. On a donc $E = P - D$, ce qui prouve que E est un F_σ. Soit donc

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \tag{15}$$

un développement de E en ensembles fermés.

L'ensemble B n'étant pas de première catégorie, l'ensemble E ne l'est pas, à plus forte raison. Par conséquent, un, au moins, des ensembles de la série (15) contient un carré Q.

On a

$$Q = QE = Q(A+C) + QB. \tag{16}$$

Or, la somme de deux F_σ punctiformes étant punctiforme [1]), l'ensemble $A+C$ est un F_σ punctiforme; donc $Q(A+C)$ l'est aussi.

[1]) Nous nous appuyons sur la proposition suivante: La somme d'une infinité dénombrable d'ensembles punctiformes fermés est punctiforme. Pour la démonstration, voir Mazurkiewicz: *Contribution à la théorie des ensembles*, Bull. de l'Acad. des Sc. de Cracovie 1913.

B étant un G_δ punctiforme. il en est de même de QB. Ainsi, la formule (16) représente une décomposition du carré qui est de la forme (11). Ceci contredit le théorème cité de M. **Mazurkiewicz**.

Donc, l'hypothèse, qu'il existe une décomposition de la forme (14), implique une contradiction. C. Q. F. D.

Passons à la décomposition de la forme (13).

Reprenons l'ensemble S de la formule (10) et désignons par D_n la droite $x = r_n$, $\{r_n\}$ étant la suite de tous les nombres rationnels. Pour chaque n, l'ensemble SD_n est dénombrable. On peut donc trouver dans D_n un ensemble E_n tel que

$$SD_n \subset E_n \subset D_n \tag{17}$$

et que la différence $D_n - E_n$ soit dénombrable est dense dans D_n.

Posons

$$M = S + \sum_{n=1}^{\infty} E_n. \tag{18}$$

Nous allons prouver que la décomposition

$$P = M + C(M) \tag{19}$$

répond au problème.

Observons d'abord que, pour chaque n,

(20) l'ensemble I' contient un segment de la droite D_n.

En effet, chaque point du segment $-\frac{1}{2^n} \leqslant y \leqslant \frac{1}{2^n}$ de la droite D_n est un point limite de l'image de la fonction $y = \frac{1}{2^n} \sin \frac{1}{x - r_n}$. Or, la somme de tous les termes de la série (6) sauf le n-ième étant une fonction continue pour $x = r_n$, il existe donc sur la droite D_n un segment contenu dans I'.

Il résulte immédiatement de la proposition (20) que

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n \subset \sum_{n=1}^{\infty} I'_{r_n}. \tag{21}$$

Il ressort aussi de cette proposition que

(22) si L est un continu situé dans I', il contient un segment d'une des droites D_n.

En effet, nous pouvons supposer que L n'est pas contenu dans aucune droite D_n. Nous montrerons que L n'est non plus situé sur aucune droite verticale à abscisse irrationnelle.

Remarquons à ce but que, la fonction $\psi(x)$ étant continue aux x irrationnels, les points de I' à abscisse irrationnelle coïncident avec ceux de I. Ceci peut s'écrire:

$$I' - \sum_{n=1}^{\infty} D_n = I - \sum_{n=1}^{\infty} D_n. \tag{23}$$

Par conséquent, l'ensemble I' ne contient qu'un seul point sur chaque droite verticale à abscisse irrationnelle. Une telle droite ne peut donc contenir L tout entier.

Soient donc $x_1 < x_2$ deux abscisses différentes de points de L. Il s'en suit (d'après (23)) que L contient chaque point de I à abscisse irrationnelle x telle que $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$. Or, les points de I à abscisse rationnelle étant des points limites des ceux à abscisse irrationnelle, il en résulte que L contient l'image J de $\psi(x)$, pour $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$. Donc, $J' \subset L$ et, selon (20), il existe dans L un segment de droite D_n pour chaque r_n situé entre x_1 et x_2.

La proposition (22) établie, nous passons à la démonstration des propriétés de la décomposition (19).

1. $C(M)$ est punctiforme. Car, d'après (18), $C(M) \subset C(S)$ et $C(S)$ étant punctiforme, $C(M)$ l'est à plus forte raison.

2. M est punctiforme. Supposons, par contre que M contient un continu K. D'après (18): $K \subset S + \sum_{n=1}^{\infty} E_n$. Comme selon (10): $S \subset \sum_{n=1}^{\infty} I'_{r_n}$ et d'après (17) et (21): $\sum_{n=1}^{\infty} E_n \subset \sum_{n=1}^{\infty} D_n \subset \sum_{n=1}^{\infty} I'_{r_n}$, on en conclut que $K \subset \sum_{n=1}^{\infty} I'_{r_n}$, d'où

$$K = \sum_{n=1}^{\infty} K I'_{r_n}.$$

Cette formule représente le continu K sous la forme de somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés. L'un d'eux, au moins, doit contenir un continu [1]).

[1]) Voir note [1]) p. 310.

Il existe donc un n tel que KI'_{r_n} contient un continu L. Donc $L \subset I'_{r_n}$. En vertu de (22), ceci implique que L contient un segment L_1 d'un D_m. Donc $L_1 \subset MD_m = SD_m + D_m\sum_{n=1}^{\infty}E_n$. Mais $D_m\sum_{n=1}^{\infty}E_n = E_m$ d'où, selon (17), $L_1 \subset E_m$. Or, l'ensemble E_m étant situé sur la droite D_m et la différence $D_m - E_m$ étant dense dans D_m, E_m est punctiforme, contrairement à l'inclusion $L_1 \subset E_m$.

3. M est un $F_\sigma \times G_\delta$. Or, selon (18),

$$M = \left(S - \sum_{n=1}^{\infty} D_n\right) + S \times \sum_{n=1}^{\infty} D_n + \sum_{n=1}^{\infty} E_n = \tag{24}$$

$$= \left(S - \sum_{n=1}^{\infty} D_n\right) + \sum_{n=1}^{\infty} E_n$$

d'après (17). D'autre part, en vertu de (23) et (21), on a

$$S - \sum_{n=1}^{\infty} D_n = \sum_{n=1}^{\infty} I'_{r_n} - \sum_{n=1}^{\infty} D_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_n = \sum_{n=1}^{\infty} I'_{r_n} \times \sum_{n=1}^{\infty} E_n.$$

En ajoutant ces deux identités, on a d'après (24):

$$M = \sum_{n=1}^{\infty} I'_{r_n} - \left(\sum_{n=1}^{\infty} D_n - \sum_{n=1}^{\infty} E_n\right). \tag{25}$$

Or, le premier membre de cette différence est manifestement un F_σ. Le second l'est également, car par définition des E_n, c'est un ensemble dénombrable. La formule (25) représente donc l'ensemble M sous la forme d'une différence de deux F_σ, ce qui prouve que M est le produit d'un F_σ et d'un G_δ.

Le complémentaire $C(M)$ de M est donc une somme d'un F_σ et d'un G_δ.

Il est ainsi établi que la formule (19) représente une décomposition de la forme (13) du plan en deux ensembles punctiformes.