Sur l'unicité du développement trigonométrique.

Par

Alexandre Rajchman (Varsovie).

1. Le problème de l'unicité du développement trigonométrique implique la question suivante:

„quelles hypothèses suffit-il de faire sur l'ensemble E pour que le théorème suivant soit exact:

si une série trigonométrique converge vers zéro partout, *sauf peut-être aux points de l'ensemble* E,

tous les coefficients de la série sont nuls".

La question toute analogue se pose, si au lieu de la convergence (dans les points qui n'appartiennent pas à E) on suppose la sommabilité par le procédé de Riemann, ou plus généralement par la méthode des moyennes arithmétiques de Hölder-Cesàro, ou plus généralement encore, par le procédé de Poisson [1]).

Cependant, si l'on considère ces procédés de sommation, il faut faire l'hypothèse additionnelle, que les coefficients de la série trigonométrique considérée tendent vers zéro, quand leur rang augmente (En effet: la série $\sum_{n=1}^{n=\infty} n \sin nx$ a pour somme généralisée (par procédé de Riemann, par celui de la deuxième moyenne et, par con-

[1]) Toute série à termes tendant vers zéro sommable par le procédé de Riemann est sommable par celui de la troisième moyenne arithmétique. (J'ai esquissé incidemment la démonstration de ce résultat dans la note „Sur le principe de localisation de Riemann" — *Comptes rendus de la Société des Sciences de Varsovie*, 1918, XI année, note d'en bas des pages 116—118, en polonais). Toute série sommable par le procédé des moyennes arithmétiques l'est également par celui de Poisson (O. Hölder: Grenzwerte von Reihen an der Convergenzgrenze, Mathematische Annalen, Bd. 33, p. 246; 1882).

séquent par celui de Poisson) zéro pour toute valeur de x). Nous admettons ici cette hypothèse sur les coefficients une fois pour toutes, et c'est seulement à la fin de cette note que nous y reviendrons pour montrer qu'au cas de la convergence ordinaire elle est inutile.

2. M. Ch. de la Vallée Poussin (*C. R.* t. 155, p. 951 ss. 1912) a donné *une* réponse à la question de tout-à-l'heure, en démontrant qu'il suffit de supposer que l'ensemble E ne contient aucun sous ensemble parfait. (J'ai prouvé dans ma Thèse (*Prace matematyczno-fizyczne* t. 30, p. 19, ss., Varsovie 1919, en polonais) que ce résultat subsiste, si au lieu de la convergence ordinaire on prend la sommabilité par le procédé de Poisson).

Parmi les ensembles qui contiennent des sous-ensembles parfaits les premiers à examiner sont des ensembles parfaits eux-mêmes.

Il est bien clair qu'aucun ensemble parfait de mesure positive ne vérifie les conditions du problème; en effet: il suffit de développer la *fonction caractéristique* de l'ensemble (la fonction qui prend la valeur *un* pour tout x appartenant à l'ensemble et la valeur *zéro* pour toute autre valeur de x) en série de Fourier-Lebesgue pour avoir une série trigonométrique avec le premier coefficient positif égal à la mesure de l'ensemble divisée par 2π) qui converge vers zéro pour tout x situé en dehors de l'ensemble considéré. M. D. Menchoff (*C R.* t. 163. 1916, p. 433 ss.) a prouvé qu'*il existe des ensembles parfaits de mesure nulle ne vérifiant pas les conditions du problème du § 1;* cet auteur a construit l'exemple d'une série trigonométrique à coefficients non nuls qui, en dehors d'un ensemble parfait de mesure nulle, converge vers zéro.

Il est naturel de se demander: ce résultat est-il susceptible d'une généralisation? Peut-on construire une série trigonométrique convergente presque partout vers zéro, en mettant à la place de l'ensemble particulier employé par M. Menchoff un ensemble parfait de mesure nulle, absolument *quelconque*? Ou, au contraire, existe-t-il des ensembles parfaits auxquels s'étend le théorème sur l'unicité du développement trigonométrique?

Nous croyons pouvoir répondre affirmativement à cette dernière question, en définissant une classe d'ensembles parfaits auxquels s'applique le théorème sur l'unicité du développement trigonométrique. Il nous sera commode de parler, plus généralement, d'une classe d'ensembles fermés, mais tout l'intérêt de nos considérations réside dans le cas, où les ensembles en question sont parfaits.

3. *Les ensembles fermés du type Hardy-Littlewood-Steinhaus.*

Soit Z un ensemble fermé de nombres réels compris (au sens large) entre zéro et un [1]). 'A chaque x appartenant à Z faisons correspondre un point $P(x)$, dont les coordonnées polaires sont $r=1$ et $\theta=2\pi x$. Quand x décrit l'ensemble fermé Z, le point $P(x)$ décrit sur la circonférence du cercle de rayon *un* un ensemble fermé que nous allons appeler $\mathfrak{Z}$.

Soit k un entier positif quelconque et appelons $\mathfrak{Z}_k$ l'ensemble décrit par le point $P(kx)$ quand x décrit Z. Le point $P(kx)$ est évidemment identique au point $P(kx-Ekx)$, Ekx désignant le plus grand entier ne dépassant pas kx. Pour qu'un point $P(y)$ $(0\leqq y<1)$ n'appartienne pas à $\mathfrak{Z}_k$ il faut et il suffit que les k nombres

$$\frac{y}{k}, \frac{y}{k}+\frac{1}{k}, \ldots \frac{y}{k}+\frac{k-1}{k}$$

n'appartiennent pas à Z.

En considérant chaque point de $\mathfrak{Z}_k$ comme un $P(y)$ avec $0\leqq y\leqq 1$, on peut faire correspondre à chaque $\mathfrak{Z}_k$ l'ensemble des y correspondants. Nous allons désigner cet ensemble par Z_k. (Si l'un de nombres 0 et 1 appartient à Z_k, l'autre y appartient également).

Soit $2\pi d_k$ la longueur du plus grand arc de cercle ne contenant à son intérieur (au sens strict) aucun point de $\mathfrak{Z}$ (la longueur du plus long arc *contigu* à $\mathfrak{Z}_k$).

On a pour toute valeur de k:

$$0\leqq d_k\leqq 1$$

et, par suite, ou bien

$$\limsup_{k\to\infty} d_k>0 \tag{1}$$

ou

$$\limsup_{k\to\infty} d_k=\lim_{k\to\infty} d_k=0.$$

L'ensemble fermé Z sera dit du type Hardy-Littlewood-Steinhaus ou, pour abréger, *du type* (H), *lorsqu'il vérifie l'inégalité* (1).

Pour l'ensemble bien connu de Cantor, on a

$$d_{3^h}=\tfrac{1}{3} \qquad (h=1,2\ldots)$$

donc cet ensemble est du type (H).

[1]) Nous supposerons, que si l'un de nombres 0 et 1 appartient à Z, l'autre y appartient également.

Sans donner explicitement la définition que nous venons d'énoncer, MM. Hardy, Littlevood et Steinhaus (les deux premiers auteurs dans un cas particulier important, le dernier — d'une manière absolument générale) ont démontré que tous les ensembles fermés du type (H) sont de mesure nulle [1]).

Ce théorème est un corollaire immédiat du résultat principal de cette note que nous pouvons maintenant énoncer sous forme précise:

Si la série trigonométrique

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{n=\infty}(a_n \cos 2\pi n x + b_n \sin 2\pi n x), \tag{2}$$

dont les coefficients a_n, b_n tendent vers zéro quand $n \to \infty$, converge vers zéro partout, sauf peut-être aux points d'un ensemble fermé Z, ou, plus généralement, si partout, sauf peut-être aux points de Z, on a

$$\frac{a_0}{2}+\lim_{r\to 1}\sum_{n=1}^{n=\infty}(a_n \cos 2\pi n x + b_n \sin 2\pi n x) r^n = 0, \tag{3}$$

alors, pourvu que l'ensemble Z soit du type (H), on aura

$$a_0 = 0, \quad a_n = b_n = 0 \qquad (n = 1, 2 \ldots).$$

4. M. Steinhaus (loc. cit.) a démontré, que l'on a *presque partout* (au sens de Lebesgue)

$$(S) \limsup_{n\to\infty} |a_n \cos 2\pi n a + b_n \sin 2\pi n x| = \limsup_{n\to\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}.$$

Cette proposition est une généralisation du théorème bien connu de Cantor-Bernstein („l'ensemble de points de convergence d'une série trigonométrique, dont les coefficients ne tendent pas

[1]) Hardy-Littlewood: Some Problems concerning Diophantine Approximation Acta Mathematica, tome 37 (1914). Sans connaître ce mémoire j'ai retrouvé le résultat en question de MM. Hardy et Littlewood et le fis publier comme nouveau dans le tome 24 de *Wiadomości Matematyczne* (Varsovie, 1920). (Dans le tome suivant de *Wiadomości* je m'excuse devant les lecteurs en reconnaissant le droit de priorité acquis par MM. Hardy-Littlewood dont le mémoire cité contient non seulement le résultat en question, mais encore bien de choses autrement importantes) M. H. Steinhaus qui dans une note publiée en langue polonaise dabs le même volume de *Wiadomości Matematyczne* t. 24, p. 197 ss 1920) démontra le premier le théorème en question en toute sa généralité, fait le rattacher à ma répétition inconsciente du théorème Hardy-Littlewood.

vers zéro quand leur rang augmente et, d'une manière plus générale, l'ensemble de points, où $(a_n \cos 2\pi n x + b_n \sin 2\pi n x) \to 0$ pour $n \to \infty$, est, quand a_n et b_n ne tendent pas vers zéro, un ensemble de mesure nulle"). Ce théorème, et plus directement encore le théorème (S), permettent de supprimer l'hypothèse $a_n \to 0$, $b_n \to 0$ dans le théorème sur l'unicité du développement trigonométrique *convergent*.

La relation (S) est une conséquence du fait, que les ensembles du type (H) sont de mesure nulle.

5. Nous aurons besoin de quelques préliminaires.

Posons

$$F(x) = \frac{a_0 x^2}{4} - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{a_n \cos 2\pi n x + b_n \sin 2\pi n x}{n^2}.$$

Supposons, que la série (2), dont les coefficients a_n, b_n tendent vers zéro pour $n \to \infty$, converge vers zéro dans un intervalle (α, β), ou, plus généralement, que la relation (3) est vérifiée par tout x compris (au sens strict) entre α et β.

Je dis que $F(x)$ *est une fonction linéaire dans l'intervalle* (α, β) *considéré.*

En effet: dans le cas de la convergence on aura pour $\alpha < x < \beta$

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2} = 0 \tag{4}$$

(d'après le théorème classique de Riemann (*Riemanns Werke*, 2me édition allemande, p. 247 ss.) la limite qui figure au premier membre de la relation (4), existe et est égale à la somme de la série (2) en tout point de convergence).

[1] Posons $\psi(x) = F(x) - F(\alpha) \frac{F(\beta) - F(\alpha)}{\beta - \alpha}(x - \alpha)$; on a $\psi(\alpha) = \psi(\beta)$; supposons, par l'impossible, que pour une valeur de x_0 comprise entre α et β $\psi(x_0) = m > 0$; posons: $g(x) = \psi(x) - \frac{m}{(\beta - \alpha)^2}(x - \alpha)(\beta - x)$; le maximum du trinôme de second degré que nous avons retranché de $\varphi(x)$ étant égal à $\frac{1}{4} m$, on aura $g(x_0) \geqq \frac{3}{4} m > 0$; puisque $g(\alpha) = g(\beta) = 0$, $g(x)$ possède un maximum positif dans (α, β) atteint par ex. pour $x = \gamma$; on a pour h assez petit

$$0 > \frac{g(\gamma+h) + g(\gamma-h) - 2g(\gamma)}{h^2} = \frac{F(\gamma+h) + F(\gamma-h) - 2F(\gamma)}{h^2} + \frac{2m}{(\beta - \alpha)^2}$$

ce qui contredit la seconde des inégalités (5); de même l'hypothèse $\psi(x) < 0$ est en contradiction avec la première partie de (5).

Dans le cas plus général, celui de la relation (3), on peut appliquer la proposition suivante (que j'ai démontrée dans ma Thèse polonaise, citée au § 2).

„Si la limite

$$s(x_0) = \frac{a_0}{2} + \lim_{r \to 1} \sum_{n=1} (a_n \cos 2\pi n x_0 + b_n \sin 2\pi n x_0) r^n$$

existe, et si de plus $a_n \to 0$, $b_n \to 0$, quand $n \to \infty$, alors les inégalités suivantes sont vérifiées:

$$\liminf_{h \to 0} \frac{F(x_0+h) + F(x_0-h) - 2F(x_0)}{h^2} \leqq s(x_0)$$

$$s(x_0) \leqq \limsup_{h \to 0} \frac{F(x_0+h) + F(x_0-h) - 2F(x_0)}{h^2} \text{“}.$$

Dans l'intervalle (α, β) on a, par hypothèse, $s(x) = 0$, on aura donc pour $\alpha < x < \beta$:

$$(5) \qquad \liminf_{h \to 0} \frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2} \leqq 0 \leqq$$

$$\leqq \limsup \frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2}.$$

Cette rélation renferme (4) comme un cas particulier.

D'après le théorème de Schwarz, la fonction continue $F(x)$ vérifiant dans (α, β) simultanément les deux inégalités (5), est une *fonction linéaire* (cf. page précédente, note d'en bas) pour $\alpha \leqq x \leqq \beta$ c. q. f. d.

6. Lemme. a) Si la série (2) converge vers zéro pour tout x n'appartenant pas à l'ensemble Z, la série suivante:

$$(6) \qquad \frac{a_0}{2} + \sum_{p=1}^{p=\infty} a_{pk} \cos 2\pi p x + b_{pk} \sin 2\pi p x$$

converge vers zéro pour tout x n'appartenant pas à Z_k (notations du § 3).

b) Si la relation (3) est vérifiée par tout x n'appartenant pas à l'ensemble Z, on aura pour tout n'appartenant pas à Z_k l'équation suivante:

$$(7) \qquad \frac{a_0}{2} + \lim_{r \to 1} \sum_{p=1}^{p=\infty} (a_{pk} \cos 2\pi p x + b_{pk} \sin 2\pi p x) r^p = 0$$

Démonstration. Posons

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{m=n} (a_m \cos 2\pi m x + b_m \sin 2\pi m x),$$

$$p(r, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} (a_n \cos 2\pi n x + b_n \sin 2\pi n x) r^n,$$

$$\sigma_n(k, x) = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{j=k-1} s_n\left(\frac{x}{k} + \frac{j}{k}\right),$$

$$\pi(r, k, x) = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{j=k-1} p\left(r, \frac{x}{k} + \frac{j}{k}\right).$$

Si x n'appartient pas à Z_k, les quantités

$$\frac{x}{k};\ \frac{x}{x} + \frac{1}{k}; \dots ;\ \frac{x}{k} + \frac{k-1}{k}$$

sont extérieurs à Z (cf. § 3) et alors on a

$$\lim_{n\to\infty} s_n\left(\frac{x}{k} + \frac{j}{k}\right) = 0, \quad \text{resp.} \quad \lim_{r\to 1} p\left(r, \frac{x}{k} + \frac{j}{k}\right) = 0$$
$$(j = 0, 1, 2 \dots k-1)$$

et, par conséquant,

(6 bis) $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n(k, x) = 0,$ resp. (7 bis) $\lim\limits_{r\to 1} \pi(r, k, x) = 0.$

Les relations (6 bis) et (7 bis) expriment déjà la thèse à démontrer; en effet: quand $\frac{m}{k}$ n'est pas entier, alors

$$\sum_{j=0}^{j=k-1} \cos 2\pi m\left(\frac{x}{k} + \frac{j}{k}\right) = \sum_{j=0}^{j=k-1} \sin 2\pi m\left(\frac{x}{k} + \frac{j}{k}\right) =$$
$$= \sum_{j=0}^{j=k-1} e^{2\pi i m\left(\frac{x}{k} + \frac{j}{k}\right)} = 0$$

et, quand $m = pk$, les termes dont on prend la moyenne sont égaux entre eux. Pour passer de (7 bis) à (7) on a encore à substituer r au lieu de r^k, mais cela n'altère pas le sens de l'équation (7 bis).

Le lemme est donc démontré.

7. Nous pouvons maintenant démontrer une partie de notre résultat principal, à savoir qu'il résulte des hypothèses faites au § 3:

$$a_0 = 0$$

(l'examen des valeurs des a_n, b_n pour $n > 0$ sera fait un peu plus loin).

Posons

$$\delta = \limsup_{k \to \infty} d_k.$$

L'ensemble Z du § 3 est, par hypothèse, du type (H) — c'est-à-dire on a $\delta > 0$; il existe donc une suite d'entiers positifs infiniment croissants

$$(8) \qquad k_1, k_2 \ldots k_n \ldots$$

telle que l'on a

$$(9) \qquad d_{k_n} > \frac{\delta}{2} \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots).$$

Soient

$$P(\alpha_{k_n}) \quad \text{et} \quad P(\beta_{k_n}) \quad (0 \leqq \alpha_{k_n} < 1;\ \alpha_{k_n} < \beta_{k_n} < 2)$$

(on conserve toujours les notations du § 3) les extrémités du plus grand arc contigu à Z_{k_n}; il résulte de l'inégalité (9) — que l'on aura

$$(10) \qquad \beta_{k_n} - \alpha_{k_n} = d_{k_n} > \frac{\delta}{2} \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots).$$

Soit η une quantité positive quelconque. Puisque les coefficients a_n et b_n tendent vers zéro quand $n \to \infty$, nous pouvons choisir dans la suite (8) un nombre $k = k_{n_0}$ tel, que l'on ait pour tout $n \geqslant k$

$$(11) \qquad \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \leqq \eta.$$

Pour fixer les idées on pourra supposer que k est le plus petit terme de la suite (8) vérifiant cette condition.

Posons

$$\varphi(x) = \frac{a_0 x^2}{4} - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{a_{pk} \cos 2\pi p x + b_{pk} \sin 2\pi p x}{p^2}$$

$$\tau(x) = -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{a_{pk} \cos 2\pi p x + b_{pk} \sin 2\pi p x}{p^2};$$

on aura pour toute valeur réelle de x:

$$\varphi(x) = \frac{a_0 x^2}{4} + \tau(x); \quad \tau(x+1) = \tau(x),$$

$$|\tau(x)| \leqq \frac{\eta}{4\pi^2} \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{\eta}{24}.$$

Posons encore

$$f(x) = \frac{\varphi\left(x + \frac{\delta}{8}\right) - \varphi\left(x - \frac{\delta}{8}\right)}{2 \cdot \frac{\delta}{8}},$$

$$t(x) = \frac{\tau\left(x + \frac{\delta}{8}\right) - \tau\left(x - \frac{\delta}{8}\right)}{2 \cdot \frac{\delta}{8}}$$

on aura pour toute valeur réelle de x:

(12) $$f(x) = \frac{a_0 x}{2} + t(x),$$

$$t(x+1) = t(x),$$

(13) $$|t(x)| \leqq \frac{2 \cdot \frac{\eta}{24}}{2 \cdot \frac{\delta}{8}} = \frac{\eta}{3\delta},$$

(14) $$f(x+1) - f(x) = \frac{a_0}{2}.$$

D'après le lemme du § 6 et le théorème du § 5, la fonction $\varphi(x)$ est linéaire dans l'intervalle (α_k, β_k) et, par suite, $f(x)$ garde une valeur constante dans l'intervalle $\left(\alpha_k + \frac{\delta}{8}, \beta_k - \frac{\delta}{8}\right)$.

Posons

$$A = \alpha_k + \frac{\delta}{8}; \quad A = \beta_k - \frac{\delta}{8};$$

on aura

$$f(B) = f(A),$$

et, d'après (10), il viendra:

(15) $$B - A > \frac{\delta}{2} - \frac{2\delta}{8} = \frac{\delta}{4}.$$

Subsitituons dans la formule (14) $x = A$ et décomposons l'intervalle $(A, A+1)$ en (A, B) et $(B, A+1)$.

On aura

$$\frac{a_0}{2} = f(A+1) - f(A) = f(A+1) - f(B) + f(B) - f(A),$$

et, puisque $f(B) = f(A)$:

$$\frac{a_0}{2} = f(A+1) - f(B).$$

En décomposant $f(x)$ d'après l'identité (12), on aura

$$\frac{a_0}{2} = \frac{a_0}{2}(A+1-B) + t(A+1) - t(B),$$

c'est-à-dire

$$\frac{a_0}{2} = \frac{t(A+1) - t(B)}{B-A};$$

en appliquant les inégalités (13) et (15), on en déduit

$$\left|\frac{a_0}{2}\right| \leqq \frac{2\eta}{3\delta} : \frac{\delta}{4} = \frac{8\eta}{3\delta^2},$$

et puisque η est arbitraire:

$$a_0 = 0 \qquad \text{c. q. f. d.}$$

8. Maintenant il est aisé de voir que les ensembles fermés du type (H) sont de mesure nulle.

En effet: soit (Z) un ensemble fermé du type (H) et soit $\psi(x)$ sa fonction caractéristique. Si l'on développe $\psi(x)$ en série de Fourier

$$(16) \qquad \int_0^1 \psi(t)\,dt +$$

$$+ 2\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\cos 2\pi n x \int_0^1 \psi(t) \cos 2\pi n t\,dt + \sin 2\pi n x \int_0^1 \psi(t) \sin 2\pi n t\,dt\right),$$

on obtient une série trigonométrique, à coefficients tendant vers zéro, convergente vers zéro pour tout x extérieur à Z[1]).

[1]) „La suite des coefficients d'une série de Fourier (Fourier-Lebesgue) converge toujours vers zéro". Lebesgue: *Leçons sur les séries trigonométriques,*

La série (16) vérifie les conditions du § 3. On aura donc, en vertu du résultat démontré au § 7:

$$\frac{a_0}{2} = \int_0^1 \psi(t)\,dt = \text{mesure de } Z = 0, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

9. Reprenons le résultat du § 7 et présentons-le sous une forme un peu différente.

Soit

$$\gamma_{-n}, \dots \gamma_{-2}, \gamma_{-1}, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_n \dots \tag{17}$$

une suite de quantités complexes tendant vers zéro pour $n \to \infty$ et pour $n \to -\infty$; posons (x étant réel)

$$s_n(x) = \tfrac{1}{2} \sum_{m=-n}^{m=+n} \gamma_m e^{2\pi m i x} \tag{18}$$

Nous allons démontrer le théorème suivant:

„Soit Z un ensemble fermé du type (H); si l'on a pour tout x n'appartenant pas à Z

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = 0 \tag{19}$$

ou, d'une manière plus génerale, si l'on a pour tout x n'appartenant pas à Z et une valeur particulière fixe, de N,

$$\lim_{r\to 1} (1-r) \sum_{n=N}^{n=\infty} s_n(x) r^n = 0 \tag{20}$$

alors

$$\gamma_0 = 0\text{“}.$$

Démonstration. Soient c_n et id_n respectivement la partie réelle et imaginaire de γ_n:

$$\gamma_n = c_n + i d_n.$$

Paris, 1906, p. 61. — „La convergence de la série de Fourier de f pour une valeur déterminée de x ne dépend que de la manière dont se comporte f autour de cette valeur x“ Lebesgue, loc. cit., p. 60. Or, l'ensemble Z étant, par hypothèse, fermé, tout point x n'appartenant pas à Z peut être entouré d'un intervalle ne contenant aucun point de Z; si $\psi(x) = 0$, on aura aussi, autour de x, $\psi = 0$.

On aura:

$$s_0(x) = \tfrac{1}{2}\gamma_0 = \tfrac{1}{2}c_0 + i \cdot \tfrac{1}{2}d_0,$$

$$(21) \qquad 2[s_n(x) - s_{n-1}(x)] = \gamma_n e^{2\pi nix} + \gamma_{-n} e^{-2\pi nix} =$$
$$= [(c_n + c_{-n}) \cos 2\pi nx + (d_{-n} - d_n) \sin 2\pi nx] +$$
$$+ i[(d_n + d_{-n}) \cos 2\pi nx + (c_n - c_{-n}) \sin 2\pi nx];$$

pour toute valeur fixe de N

$$\lim_{r=1} (1-r) \sum_{n=0}^{n=N} s_n(x) r^n = 0,$$

par suite

$$(22) \qquad \lim_{r\to 1} (1-r) \sum_{n=N}^{n=\infty} s_n(x) r^n = \lim_{r\to 1} (1-r) \sum_{n=0}^{n=\infty} s_n(x) r^n,$$

$$(23) \qquad (1-r) \sum_{n=0}^{n=\infty} s_n(x) r^n = \sum_{n=0}^{n=\infty} s_n(x) r^n - \sum_{n=0}^{n=\infty} s_n(x) r^{n+1} =$$
$$= s_0(x) + \sum_{n=1}^{n=\infty} [s_n(x) - s_{n-1}(x)] r^n.$$

En rapprochant les formules (21), (22) et (23), on voit immédiatement que la rélation (20) exprime la sommabilité vers zéro par le procédé de Poisson de deux séries trigonométriques

$$\frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{c_n + c_{-n}}{2} \cos 2\pi nx + \frac{d_{-n} - d_n}{2} \sin 2\pi nx \right)$$

et

$$\frac{d_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{d_n + d_{-n}}{2} \cos 2\pi nx + \frac{c_n - c_{-n}}{2} \sin 2\pi nx \right).$$

D'après la conclusion du § 7. il en résulte:

$$c_0 = d_0 = c_0 + id_0 = \gamma_0 = 0 \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Si l'on voulait restreindre ces considérations au cas de la convergence ordinaire, on dirait que la relation (19) entraîne la convergence vers zéro de deux séries de tout-à-l'heure, et on obtiendrait, en vertu du § 7, sans passer par le procédé de Poisson,

$$\gamma_0 = 0, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

10. Achevons la démonstration du théorème principal du § 3. Posons

$$a_{-m} = a_m; \quad b_{-m} = -b_m$$

et appellons η_k la plus grande parmi les quantités

$$\sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \text{pour} \quad n \geqq k > 0;$$

on aura pour tout $|n| \geqq k$ et pour toute valeur réelle de x et de m:

$$\left|(a_n - ib_n)e^{2\pi mix}\right| \leqq \eta_n.$$

Soit q un entier positif quelconque et $n > 2q$.

Posons

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{m=n}(a_m \cos 2\pi mx + b_m \sin 2\pi mx) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{m=-n}^{m=+n}(a_m - ib_m)e^{2\pi mix}$$

$$s_{n,q}(x) = \frac{1}{2}\sum_{p=-(n-q)}^{p=n-q}(a_{p+q} - ib_{p+q})e^{2\pi pix}.$$

On a

$$s_n(x)e^{-2\pi qix} = \frac{1}{2}\sum_{m=-n}^{m=+n}(a_m - ib_m)e^{2\pi(m-q)ix} =$$

$$= s_{n,q}(x) + \frac{1}{2}\sum_{p=-(n+q)}^{p=-n+q-1}(a_{p+q} - ib_{p+q})e^{2\pi pix},$$

puisque $n > 2q$,

$$-(n+q) + q < -n + q - 1 + q \leqq -1,$$

on aura, pour

$$-n - q \leqq p \leqq -n + q - 1:$$

$$(a_{p+q} - ib_{p+q})e^{2\pi pix}| \leqq \eta_{n+1-2q} \leqq \eta_{n-2q};$$

et par suite

$$\left|\frac{1}{2}\sum_{p=-(n+q)}^{p=-n+q-1}(a_{p+q} - ib_{p+p})e^{2\pi pix}\right| < q \cdot \eta_{n-2q}.$$

donc on a pour toute valeur réelle de x et pour $n > 2q$:

$$s_{n,q}(x) - s_n(x)e^{-2\pi qix}| < q\eta_{n-2q}.$$

Il est aisé de voir que, puisque $\eta_{n-2q} \to 0$ quand $n \to \infty$, les quantités $s_{n,q}(x)$ et $s_n(x)$ tendent en même temps vers zéro; ceci est aussi vrai pour le passage à limite ordinaire que pour la limite généralisée par le procédé de Poisson.

Mais pour $n \to \infty$, $s_{n,q}(x)$ devient

$$\tfrac{1}{2}\sum_{p=-\infty}^{p=+\infty}(a_{p+q}-i\,b_{p+q})\,e^{2\pi p i x};$$

si l'on pose

$$\gamma_p = a_{p+q} - i\,b_{p+q};$$

la convergence vers zéro de la série (2) s'exprime par la relation (19), et l'hypothèse (3) devient (20), avec $N = 2q$.

En appliquant le théorème de § 9, on en déduit

$$\gamma_0 = a_q - i\,b_q = 0,$$

c'est-à-dire

$$a_q = 0 \quad \text{et} \quad b_q = 0.$$

Le théorème fondamental du § 3 est donc entièrement démontré.

11. Pour montrer que dans le théorème du § 3 restreint au cas de la convergence ordinaire, l'hypothèse:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ n'est pas indépendante de celle de la convergence, commençons par établir le théorème de M. Steinhaus, exprimé par la rélation (S) du § 4. Nous avons à prouver que l'on a presque partout (au sens de Lebesgue):

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n \cos 2\pi n x + b_n \sin 2\pi n x| = \limsup_{n\to\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}.$$

Nous alons préciser ceci davantage. Appelons E l'ensemble de solutions réelles de l'inégalité

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n \cos 2\pi n x + b_n \sin 2\pi n x| < \limsup_{n\to\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}. \tag{24}$$

L'ensemble E est non seulement de mesure nulle: il est encore un ensemble de première catégorie de forme particulière: il est sous-ensemble d'une somme des ensembles fermés du type (H).

En effet: posons

$$\varrho_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2},$$

$$\cos 2\pi n h_n = \frac{a_n}{\varrho_n}; \qquad \sin 2\pi n h_n = \frac{b_n}{\varrho_n}.$$

On aura

$$a_n \cos 2\pi n x + b_n \sin 2\pi n x = \varrho_n \cos 2\pi n (x - h_n).$$

La relation (24) prendra alors la forme suivante:

$$\limsup_{n\to\infty} |\varrho_n \cos 2\pi (x - h_n)| < \limsup_{n\to\infty} \varrho_n.$$

Appelons E^p l'ensemble de solutions réelles de l'inégalité suivante

$$(25) \qquad \limsup_{n\to\infty} |\varrho_n \cos 2\pi n (x - h_n)| \leqq \left(1 - \frac{1}{p}\right) \limsup_{n\to\infty} \varrho_n.$$

On aura évidemment

$$(26) \qquad E \equiv E^1 + E^2 + \ldots + E^p + \ldots$$

Soit

$$(27) \qquad n_1, n_2 \ldots n_k \ldots$$

une suite d'entiers positifs infiniment croissants, tels que l'on ait

$$\lim_{k\to\infty} \varrho_{n_k} = \limsup_{n\to\infty} \varrho_n;$$

toute valeur x vérifiant l'inégalité (25) vérifie aussi la suivante

$$(28) \qquad \limsup_{k\to\infty} \cos 2\pi n_k (x - h_{n_k}) \leqq 1 - \frac{1}{p}$$

on peut donc extraire de la suite (27) une suite partielle infinie

$$n_{k_1}, n_{k_2} \ldots n_{k_j} \ldots$$

telle que l'on ait pour tout x vérifiant (28):

$$(29_j) \qquad \cos 2\pi n_{k_j} (x - h_{n_{k_j}}) \leqq 1 - \frac{1}{2p} \qquad (j = 1, 2 \ldots)$$

Les inégalités (29_j) définissent les ensembles fermés $z^p(j)$ — ($z^p(1)$ est l'ensemble de solutions de l'inégalite (29_1). $z^p(2)$ — celui de (29_2), etc.) — appelons Z^p leur produit:

$$Z^p = z^p(1) \cdot z^p(2) \ldots z^p(j) \ldots$$

Il est aisé de voir que pour l'ensemble Z^p tous les d_{k_j} (notations du § 3) sont supérieurs à une quantité fixe ne dépendant que de p: on aura donc

$$\limsup_{k\to\infty} d_k > 0,$$

et Z^p est du type (H), et par suite (§ 8) de mesure nulle.

Puisque évidemment

$$E^p \subset Z^p,$$

le rélation (26) exprime le théorème de M. Steinhaus, tel qu'il a été énoncé plus haut.

12. La convergence de la série (2) en déhors d'un ensemble Z appartenant au type (H) entraîne comme conclusion

$$a_n \to 0 \quad b_n \to 0 \quad \text{pour} \quad n \to \infty.$$

En effet: tout ensemble du type (H) étant de mesure nulle (§ 8) la convergence a lieu dans un ensemble de mesure *un* $(0 \leqq x < 1)$. On a donc dans un ensemble de mesure *un*

$$\lim_{n\to\infty} |a_n \cos 2\pi nx + b_n \sin 2\pi nx| =$$
$$= \limsup_{n\to\infty} |a_n \cos 2\pi nx + b_n \sin 2\pi nx| = 0.$$

D'autre part, en vertu du théorème de M. Steinhaus la relation (S) est vérifiée dans un ensemble de mesure *un*. Or, deux ensembles de mesure *un* situés tous les deux sur le segment $(0, 1)$ ont nécessairement des points communs. En ces points communs on aura

$$0 = \limsup_{n\to\infty} |a_n \cos 2\pi nx + b_n \sin 2\pi nx| = \limsup_{n\to\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}.$$

On aura donc $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ c. q. f. d.

L'hypothèse superflue est donc éliminée.