Sur une propriété des ensembles frontières.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

1. Dans un travail publiée dans le tome I de ce journal [1]) M. Mazurkiewicz considère comme probable que tout ensemble plan ne contenant aucun domaine est homéomorphe avec un ensemble plan non dense. Le but de cette Note est de démontrer cette supposition de M. Mazurkiewicz. Nous prouverons même un théorème plus général qui suit:

Théorème. Tout ensemble frontière dans l'espace à m dimensions est homéomorphe d'un ensemble non dense, situé dans le même espace.

2. Soit F un ensemble frontière donné dans R_m [2]), c'est-à-dire ne contenant aucun point intérieur. Il existe donc un ensemble dénombrable D, dense dans R_m, dont aucun point n'appartient à F. Pour démontrer notre théorème, il suffira évidemment de prouver que l'ensemble $E = R_m - D$ est homéomorphe d'un ensemble non dense, situé dans R_m.

3. Nous démontrerons d'abord que tout ensemble G de R_m, homéomorphe de E est un ensemble frontière [3]).

Soit donc q_0 un point de G, ε — un nombre positif donné. Il suffit de démontrer qu'il existe un point h n'appartenant pas à G et tel que $\varrho(q_0, h) \leqslant \varepsilon$.

[1]) Sur un ensemble G_δ etc. *Fund. Math.* t. I, p. 81.

[2]) Nous désignerons par R_m l'ensemble de tous les points de l'espace à m dimensions.

[3]) Cela résulte d'ailleurs d'un théorème général sur l'invariance topologique des points intérieurs pour les transformations biunivoques et bicontinues dans R_m (V. p. e. H. Lebesgue: *Fund. Math.* t. II, p. 270); or nous donnons ici une preuve directe de la propriété en question de l'ensemble E, sans faire usage du théorème général signalé, dont la démonstration est assez compliquée.

Soit p_0 l'image de q_0 dans E. L'ensemble G étant une image continue de E, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que l'image q de tout point p de E satisfaisant à l'inégalité $\varrho(p_0, p) < \delta$, vérifie l'inégalité $\varrho(q_0, q) < \varepsilon$. Or D étant dense dans R_m, il existe un point g de R_m n'appartenant pas à E et tel que $\varrho(p_0, g) < \delta$. L'ensemble D étant dénombrable, il existe une suite infinie p_n de points de $E - R_m = D$, telle que $\varrho(p_0, p_n) < \delta$ et $\lim\limits_{n=\infty} p_n = g$. Soit q_n l'image du point p_n dans G: nous aurons donc $\varrho(q_0, q_n) < \varepsilon$ pour $n = 1, 2, \ldots$ La suite q_n est donc bornée et parsuite on en peut extraire une suite convergente q_{k_n} $(n = 1, 2, \ldots)$: soit h sa limite; h ne peut être un point de G, puisque alors, E étant une image continue de G, la suite p_{k_n} $(n = 1, 2, \ldots)$ convergerait vers un point de E (image de h dans E), ce qui est impossible, p_n convergeant vers g. Donc $h = \lim\limits_{n=\infty} q_{k_n}$ n'appartient pas à G; or, d'après $\varrho(q_0, q_n) < \varepsilon$, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, nous trouvons $\varrho(q_0, h) \leqslant \varepsilon$, c. q. f. d.

4. g étant un point donné de R_m et δ un nombre positif donné, désignons par $T(g, \delta)$ la transformation faisant correspondre à tout point p de R_m, autre que g, un point p_1 situé sur la demi-droite gp et tel que $\varrho(g, p_1) = \varrho(g, p) + \delta$.

Il est bien évident que la transformation $T(g, \delta)$ établit une correspondance biunivoque et bicontinue entre l'ensemble de tous les points de R_m autres que g, et l'ensemble de tous les points de R_m ayant une distance $> \delta$ du point g. On a évidemment pour tout point $p \neq g$ de R_m:

$$\varrho(p, p_1) = \delta$$

et on voit sans peine qu'on a toujours pour deux points p et p' autres que g

$$\varrho(p_1, p_1') \leqslant \varrho(p_1, p) + \varrho(p, p') + \varrho(p', p_1') = \varrho(p, p') + 2\delta,$$
$$\varrho(p_1, p_1') \geqslant \varrho(p, p')\ [1].$$

[1]) En effet, en désignant par φ l'angle entre les demi-droites gp et gp' et en posant $\varrho(g, p) = r$, $\varrho(g, p') = r'$, $\varrho(g, p_1) = r_1$, $\varrho(g, p_1') = r_1'$, on trouve sans peine

$$\varrho(p, p') = \sqrt{(r - r')^2 + 4rr' \sin^2\frac{\varphi}{2}},$$
$$\varrho(p_1, p_1') = \sqrt{(r_1 - r_1')^2 + 4r_1 r_1' \sin^2\frac{\varphi}{2}};$$

5. On peut, comme on sait, ranger dans une suite infinie

(1) $$S_1, S_2, S_3, \ldots$$

toutes les sphères m-dimensionnelles aux rayons rationnels et dont les centres ont des coordonnées rationnelles.

L'ensemble E étant frontière, il existe un point g_1 n'appartenant pas à E et intérieur à S_1. Appliquons à l'ensemble $R_m - (g_1)$ [1] la transformation $T\left(g_1, \frac{1}{4}\right)$: soit T_1 l'ensemble ainsi obtenu et soit E_1 la transformée de E. L'ensemble E_1 sera homéomorphe à E, donc, comme nous avons démontré au § 3, un ensemble frontière. Il existe donc un point g_2 n'appartenant pas à E_1 et intérieur à S_2. Appliquons à l'ensemble $R_m - (g_2)$ la transformation $T\left(g_2, \frac{1}{4^2}\right)$ et soit T_2 l'ensemble ainsi obtenu et E_2 — la transformée de E_1. Généralement, supposons que nous avons déjà défini les ensembles T_{n-1} et E_{n-1} et que E_{n-1} est homéomorphe à E. D'après le lemme du § 3, E_{n-1} est un ensemble frontière: il existe donc un point g_n intérieur à S_n et n'appartenant pas à E_{n-1}. Appliquons à l'ensemble $R_m - (g_n)$ la transformation $T\left(g_n, \frac{1}{4^n}\right)$: nous désignerons par T_n l'ensemble ainsi obtenu et par E_n la transformée de E_{n-1}. Les ensembles T_n et E_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ sont ainsi définis par l'induction et les ensembles E_n sont tous homéomorphes de E.

6. Soit p un point donné de E, $p = \varphi_n(p)$ — son image dans E_n; $\varphi_n(p)$ étant la transformée du point $\varphi_{n-1}(p)$ obtenue par la transformation $T\left(g_n, \frac{1}{4^n}\right)$, nous avons (d'après la propriété de la transformation $T(g, \delta)$, § 4):

(2) $$\varrho\left[\varphi_{n-1}(p), \varphi_n(p)\right] = \frac{1}{4^n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

On en conclut que la suite $\varphi_n(p)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ est convergente (pour tout point p de E): posons

(3) $$\lim_{n=\infty} \varphi_n(p) = \varphi(p).$$

---

or: $r_1 - r = r'_1 - r' = \delta$, donc $r - r' = r_1 - r'_1$ et $r_1 r'_1 > r r'$; par conséquent
$$\varrho(p_1, p'_1) \geqslant \varrho(p, p').$$

[1] (g) désigne l'ensemble formé d'un seul élément, g.

E_n étant une image continue de E, les fonctions $\varphi_n(p)$ sont continues dans E: d'après (3) et (2) la fonction $\varphi(p)$ est limite d'une suite uniformément convergente de fonctions continues dans E: donc $\varphi(p)$ est une fonction continue dans E. Désignons par H l'ensemble de tous les points $\varphi(p)$ correspondant aux points p de E; H sera donc une image continue de E.

Soient maintenant p et p' deux points de E. Nous avons, d'après la propriété de la transformation T, démontrée au § 4:

$$\varrho[\varphi_1(p), \varphi_1(p')] \geqslant \varrho(p, p')$$

et, généralement:

$$\varrho[\varphi_n(p), \varphi_n(p')] \geqslant \varrho(p, p'), \qquad \text{pour } n = 1, 2, 3, \ldots$$

ce qui donne, d'après (3):

$$\varrho[\varphi(p), \varphi(p')] \geqslant \varrho(p, p'). \tag{4}$$

Donc, si $p \neq p'$, nous avons $\varphi(p) \neq \varphi(p')$. L'ensemble H est donc une image biunivoque de E.

Soit maintenant $q_0 = \varphi(p_0)$ un point de H et $q_n = \varphi(p_n)$ une suite de points de H convergente vers q_0. Je dis que

$$\lim_{n=\infty} p_n = p_0. \tag{5}$$

En effet, admettons que la formule (5) ne subsiste pas. Il existerait donc un nombre positif δ et une suite infinie croissante d'indices k_n $(n = 1, 2, \ldots)$ tels que

$$\varrho(p_{k_n}, p_0) \geqslant \delta \qquad \text{pour } n = 1, 2, 3, \ldots \tag{6}$$

D'après (4), la formule (6) donne:

$$\varrho[\varphi(p_{k_n}), \varphi(p_0)] \geqslant \varrho(p_{k_n}, p_0) \geqslant \delta, \qquad \text{pour } n = 1, 2, \ldots,$$

ce qui est incompatible avec l'hypothèse que

$$\lim_{n=\infty} \varphi(p_n) = \varphi(p_0).$$

Nous avons ainsi démontré que la fonction inverse de $\varphi(p)$ est continue (dans H).

L'ensemble H est donc une image biunivoque et bicontinue de E, c'est-à-dire H est homéomorphe à E.

7. Soit maintenant $q_0 = \varphi(p_0)$ un point donné de H, ε — un nombre positif donné. Il existe évidemment une sphère de la suite (1), soit S_k, intérieur à la sphère de centre q_0 et de rayon ε. D'après la définition de l'ensemble T_k (§ 5), nous avons pour tout point q de E_k:

$$\varrho(g_k, q) > \frac{1}{4^k},$$

c'est-à-dire pour tout point p de E:

$$\varrho[g_k, \varphi_k(p)] > \frac{1}{4^k}. \tag{7}$$

Or, d'après (2), nous trouvons sans peine, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$:

$$\varrho[\varphi_k(p), \varphi_{n+k}(p)] \leqslant \varrho[\varphi_k(p), \varphi_{k+1}(p)] + \ldots + \varrho[\varphi_{k+n-1}(p), \varphi_{k+n}(p)] =$$
$$= \frac{1}{4^{k+1}} + \frac{1}{4^{k+2}} + \ldots + \frac{1}{4^{k+n}} < \frac{1}{3 \,.\, 4^k},$$

donc, pour $n = \infty$. d'après (3):

$$\varrho[\varphi_k(p), \varphi(p)] \leqslant \frac{1}{3 \,.\, 4^k}. \tag{8}$$

Les inégalités (7) et (8) donnent pour tout point p de E:

$$\varrho[g_k, \varphi(p)] > \frac{2}{3 \,.\, 4^k},$$

c'est-à-dire pour tout point h de H:

$$\varrho[g_k, h] > \frac{2}{3 \,.\, 4^k}.$$

Le point g_k est donc extérieur à l'ensemble H. Or g_k est intérieur à S_k et parsuite $\varrho(g_k, q_0) < \varepsilon$.

Nous avons ainsi démontré que dans tout entourage d'un point quelconque q_0 de H existent des points extérieurs à H. Il s'en suit que H est un ensemble non dense (dans R_m). E étant homéomorphe à H, nous pouvons donc regarder le théorème du § 1 comme démontré.

8. L'ensemble H étant non dense, il est de même de l'ensemble fermé $\overline{H} = H + H'$. En cas du plan ($m=2$) $\overline{H}$ sera, comme on voit sans peine, une courbe cantorienne. Or, comme j'ai démontré [1]), il existe une courbe (plane) C_0, cantorienne et jordanienne à la fois,

[1]) *C. R.* t. 162, p. 625 (Note du 25 avril 1916).

qui contient une image biunivoque et continue de toute courbe cantorienne (plane) donnée [1]). Donc C_0 contient un sous-ensemble homéomorphe à H. Il en résulte tout de suite que, F étant un ensemble frontière (plan) donné arbitrairement à priori, il existe toujours un sous-ensemble de C_0 homéomorphe de F. En utilisant la terminologie de M. Fréchet on pourrait donc dire qu'il existe un ensemble plan fermé et non dense C_0, dont le type de dimension est le plus grand de tous ceux qui sont inférieurs à dR_2 (c'est-à-dire au type de dimension du plan) [2]). Un théorème analogue subsiste pour R_m [3]).

Envisageons encore le cas particulier de ce théorème pour $m=1$. Tous les ensembles linéaires parfaits non denses étant, comme on sait, homéomorphes, on en conclut sans peine que les ensembles linéaires parfaits non denses ont le plus grand type de dimension inférieure à dR_1: désignons-le par δ_1.

Soit maintenant M un ensemble linéaire non dénombrable, mesurable B. D'après le théorème de Alexandroff-Hausdorff M contient un sous-ensemble parfait, donc a le type de dimension $\geqslant \delta_1$. Il en résulte tout de suite qu'il existe seulement deux types de dimension d'ensembles linéaires non dénombrables mesurables B: le type δ_1 et le type dR_1.

Les ensembles linéaires non dénombrables (non mesurables B), peuvent avoir encore d'autres types de dimension: p. e. le type de dimension d'un ensemble linéaire non dénombrable ne contenant aucun sous ensemble parfait est évidemment $< \delta_1$. Il serait intéressant d'examiner combien il y a de types de dimension $< dR_1$ [4]).

[1]) On obtient la courbe C_0 comme il suit. On prend un carré Q, on le divise en neuf carrés plus petits et on exclue l'intérieur de celui qui contient le centre de Q. Sur chacun des huits carrés restant on opère de même et ainsi de suite *in infinitum*. L'ensemble de tous les points du carré Q, qui ne seront pas exclus, est la courbe C_0.

[2]) Cf. M. Fréchet: *Math. Ann.* 68, p. 158.

[3]) Pour le démontrer il suffirait de s'appuyer sur le théorème de M. Fréchet, d'après lequel tout ensemble contenu dans R_m et qui est complémentaire dans R_m d'un ensemble dénombrable partout dense est homéomorphe de Δ_m, Δ_m désignant l'ensemble de tous les points de R_m dont les coordonnées ne sont pas toutes rationnelles (l. c. p. 159).

[4]) M. Kuratowski a observé qu'on pourrait démontrer à l'aide du théorème de M. Zermelo que l'ensemble de tous les types de dimension (différents) $< dR_1$ a une puissance supérieure à celle du continu. Cf. P. Mahlo *Leipz. Ber.* 63. (1911).

Or, d'après un théorème de M. Mahlo, l'ensemble de tous les types de dimension d'ensembles linéaires clairsemés a la puissance $\aleph_1$ [1]), donc aussi l'ensemble de tous les types linéaires dénombrables (puisque tous les ensembles dénombrables non clairsemés ont le même type de dimension). Il en résulte qu'il y a $\aleph_1$ types de dimension d'ensembles linéaires mesurables B. Il est autrement pour R_2: M. Kuratowski a démontré qu'il y a $2^{\aleph_0}$ types de dimension de continus plans: il en résulte le même pour les ensembles mesurables B dans R_m, pour $m \geqslant 2$.

[1]) V. p. e. A. Schoenflies: Entw. d. Mengenlehre, I Hälfte (Teubner 1913) p. 384.