

## Sur les fonctions dérivées des fonctions mesurables.

Par

Stefan Banach (Léopol).

Le but de cette Note est de démontrer que *les fonctions dérivées de Dini d'une fonction  $f(x)$  mesurable (L) sont mesurables (L)*. Notre démonstration permettra en même temps de prouver que *les fonctions dérivées d'une fonction  $f(x)$  bornée de classe  $\alpha$  de Baire sont toujours de classes  $\leq \alpha + 2$ <sup>1)</sup>*.

Lemme. Prémises:  $f(x)$  est une fonction quelconque d'une variable réelle (mesurable ou non),  $\delta$  — un nombre positif,  $F(x)$  — la borne supérieure de tous les nombres

$$f(x+h) \quad \text{pour} \quad 0 \leq h \leq \delta.$$

Thèse:  $F(x)$  est une fonction n'admettant que des discontinuités ordinaires (donc  $F(x)$  est de classe  $\leq 1$  de M. Baire).

Démonstration. Désignons par  $B(\alpha, \beta)$  la borne supérieure des nombres  $f(x)$  pour  $\alpha \leq x \leq \beta$ . Soit  $x_0$  un nombre réel donné,  $x$  — un nombre réel, tel que

$$0 < x - x_0 < \delta.$$

L'intervalle  $(x, x + \delta)$  est donc une somme d'intervalles  $(x, x_0 + \delta)$  et  $(x_0 + \delta, x + \delta)$ : par conséquent

$$(1) \quad F(x) = B(x, x + \delta) = \text{Max} [B(x, x_0 + \delta), B(x_0 + \delta, x + \delta)],$$

Max  $[a, b]$  désignant le plus grand de deux nombres  $a, b$  (ou leur valeur commune).

<sup>1)</sup> Ce théorème a été signalé (pour les fonctions  $f(x)$  bornées ou non, de classe  $\alpha$ ) par M. Sierpiński: v. ce volume, p. 127.

Or, quand  $x$  décroît,  $B(x, x_0 + \delta)$  ne peut évidemment diminuer et  $B(x_0 + \delta, x + \delta)$  ne peut augmenter: donc  $B(x, x_0 + \delta)$  et  $B(x_0 + \delta, x + \delta)$  ont des limites quand  $x$  tend en décroissant vers  $x_0$ , donc, d'après (1), aussi  $F(x)$ . Donc la limite  $F(x_0 + 0)$  est déterminée. De même on démontre que la limite  $F(x_0 - 0)$  est déterminée. Notre lemme est ainsi démontré.

Corollaire I. Soit  $F(x, a, b)$  ( $b > a > 0$ ) la borne supérieure de tous les nombres

$$f(x + h) \quad \text{pour} \quad a \leq h \leq b.$$

Thèse:  $F(x, a, b)$  est une fonction de  $x$  de classe  $\leq 1$ .

Dém. Nous avons évidemment  $F(x, a, b) = B(x + a, x + b)$ . Or nous avons démontré (lemme I) que la fonction  $\varphi(x) = B(x, x + b - a)$  est de classe  $\leq 1$ : donc aussi la fonction  $F(x, a, b) = \varphi(x + a)$  est de classe  $\leq 1$ , c. q. f. d.

Corollaire II. Soit  $f(x)$  une fonction de classe  $\alpha > 0$  de M. Baire,  $b > a > 0$ ,  $\varphi(x, a, b)$  la borne supérieure des nombres

$$f(x + h) - f(x) \quad \text{pour} \quad a \leq h \leq b.$$

Thèse:  $\varphi(x, a, b)$  est une fonction de classe  $\leq \alpha$ .

Pour démontrer notre corollaire il suffit de remarquer que  $\varphi(x, a, b) = F(x, a, b) - f(x)$  et de faire appel au corollaire I et à la proposition qu'une différence de deux fonctions de classes  $\leq \alpha$  est une fonction de classe  $\leq \alpha$ .

Pareillement on établit le .

Corollaire III. Soit  $f(x)$  une fonction mesurable (L):  $\varphi(x, a, b)$  ayant même signification qu'au corollaire II,  $\varphi(x, a, b)$  est une fonction mesurable (L).

Soit maintenant  $f(x)$  une fonction bornée,  $a$  et  $b > a$  deux nombres positifs. Désignons par  $\Phi(x, a, b)$  la borne supérieure des nombres

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \quad \text{pour} \quad a \leq h \leq b$$

et par  $\varphi(x, a, b)$  — la borne supérieure des nombres

$$f(x + h) - f(x) \quad \text{pour} \quad a \leq h \leq b$$

Soit  $n$  un nombre naturel donné et posons

$$(2) \quad a_k = a + \frac{k}{n}(b - a) \quad \text{pour} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$\Phi(x, a, b)$  sera évidemment le plus grand des nombres

$$(3) \quad \Phi(x, a_{k-1}, a_k) \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Nous avons, pour  $\beta > \alpha > 0$ :

$$\left. \begin{aligned} f(x+h) - f(x) &\leq \varphi(x, \alpha, \beta), \\ \frac{1}{\beta} &\leq \frac{1}{h} \leq \frac{1}{\alpha}, \end{aligned} \right\} \text{ pour } \alpha \leq h \leq \beta$$

donc, pour  $\varphi(x, \alpha, \beta) \geq 0$ :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq \frac{\varphi(x, \alpha, \beta)}{\alpha} \quad \text{pour } \alpha \leq h \leq \beta$$

et, pour  $\varphi(x, \alpha, \beta) \leq 0$ :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq \frac{\varphi(x, \alpha, \beta)}{\beta} \quad \text{pour } \alpha \leq h \leq \beta.$$

Par conséquent:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi(x, \alpha, \beta) \leq \frac{\varphi(x, \alpha, \beta)}{\alpha} \quad \text{pour } \varphi(x, \alpha, \beta) \geq 0 \\ \text{et} \\ \Phi(x, \alpha, \beta) \leq \frac{\varphi(x, \alpha, \beta)}{\beta} \quad \text{pour } \varphi(x, \alpha, \beta) \leq 0. \end{array} \right.$$

Or

$$f(x+h) - f(x) \leq h \Phi(x, \alpha, \beta) \quad \text{pour } \alpha \leq h \leq \beta,$$

par suite

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x, \alpha, \beta) \leq \beta \Phi(x, \alpha, \beta) \quad \text{pour } \Phi(x, \alpha, \beta) \geq 0 \\ \text{et} \\ \varphi(x, \alpha, \beta) \leq \alpha \Phi(x, \alpha, \beta) \quad \text{pour } \Phi(x, \alpha, \beta) \leq 0. \end{array} \right.$$

Les formules (4) et (5) démontrent que  $\Phi(x, \alpha, \beta)$  et  $\varphi(x, \alpha, \beta)$  ont toujours le même signe et que

$$\frac{\varphi(x, \alpha, \beta)}{\beta} \leq \Phi(x, \alpha, \beta) \leq \frac{\varphi(x, \alpha, \beta)}{\alpha} \quad \text{pour } \varphi(x, \alpha, \beta) \geq 0$$

et

$$\frac{\varphi(x, \alpha, \beta)}{\alpha} \leq \Phi(x, \alpha, \beta) \leq \frac{\varphi(x, \alpha, \beta)}{\beta} \quad \text{pour } \varphi(x, \alpha, \beta) \leq 0$$

La fonction  $f(x)$  étant bornée et  $M$  désignant un nombre tel que  $|f(\xi)| \leq M$  (pour tout  $\xi$  réel), nous avons  $|f(x+h) - f(x)| \leq 2M$ , donc

$$\left| \Phi(x, \alpha, \beta) - \frac{\varphi(x, \alpha, \beta)}{\alpha} \right| \leq |\varphi(x, \alpha, \beta)| \frac{\beta - \alpha}{\alpha\beta} \leq 2M \frac{\beta - \alpha}{\alpha\beta},$$

par conséquent, d'après (2):

$$(6) \quad \left| \Phi(x, a_{k-1}, a_k) - \frac{\varphi(x, a_{k-1}, a_k)}{a_{k-1}} \right| \leq 2M \frac{b-a}{na^2}$$

pour  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Soit  $G(x, a, b, n)$  le plus grand des nombres

$$(7) \quad \frac{\varphi(x, a_{k-1}, a_k)}{a_{k-1}} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

D'après (6) ( $\Phi(x, a, b)$  étant le plus grand des nombres (3)) nous aurons évidemment

$$|\Phi(x, a, b) - G(x, a, b, n)| \leq \frac{2M(b-a)}{na^2}.$$

Par conséquent

$$(8) \quad \Phi(x, a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} G(x, a, b, n),$$

la suite à droite étant de plus convergente uniformément. Or nous avons évidemment

$$(9) \quad \overline{f'_+}(x) = \lim_{l \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi \left( x, \frac{1}{k}, \frac{1}{l} \right).$$

Soit  $f(x)$  une fonction bornée de classe  $\alpha > 0$ : d'après le corollaire II les fonctions (7) seront de classes  $\leq \alpha$ , donc aussi  $G(x, a, b, n)$ . La suite (8) étant uniformément convergente, nous en concluons que  $\Phi(x, a, b)$  est une fonction de classe  $\leq \alpha$ , donc, d'après (9),  $\overline{f'_+}(x)$  est de classe  $\leq \alpha + 2$ .

Si  $f(x)$  (supposée bornée) était mesurable ( $L$ ), il en serait de même, d'après le corollaire III, avec les fonctions (7), et les formules (8) et (9) prouveraient que  $\overline{f'_+}(x)$  est mesurable ( $L$ ).

Soit maintenant  $f(x)$  une fonction non bornée mesurable ( $L$ ),  $f_p(x)$  — la fonction égale à  $f(x)$  si  $-p \leq f(x) \leq p$ , à  $p$  si  $f(x) > p$  et à  $-p$  si  $f(x) < -p$ ;  $f_p(x)$  sera évidemment bornée et mesurable ( $L$ ) et il est aisé de voir que

$$\overline{f'_+}(x) = \lim_{p \rightarrow \infty} \overline{f'_{p+}}(x),$$

d'où il résulte que  $\overline{f'_+}(x)$  est mesurable ( $L$ ), c. q. f. d.

Pour les fonctions non mesurables ( $L$ ) les dérivées de Dini peuvent être aussi bien mesurables ( $L$ , même  $B$ ) que non mesurables, comme on le voit sans difficulté.

Nous terminerons par deux théorèmes suivants:

**Théorème I:** Si la dérivée  $f'_+(x)$  d'une fonction  $f(x)$  est finie sauf dans un ensemble au plus dénombrable de points,  $f(x)$  est une fonction mesurable ( $B$ ) (de classe  $\leq 2$ ).

Dém. Soit  $D$  l'ensemble (au plus dénombrable) où la dérivée  $f'_+(x)$  est infinie. Considérons l'ensemble  $E = E(f(x) \geq A)$ ,  $A$  étant un nombre réel donné quelconque. Soit  $x$  une limite d'une suite décroissante  $x_n$  de nombres de  $E$  et supposons que  $x$  n'appartient pas à  $E$ . Nous aurons donc  $f(x_n) \geq A$  pour  $n = 1, 2, 3, \dots$  et  $f'(x) < A$ , d'où il résulte tout de suite que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} = +\infty,$$

donc que  $f'_+(x) = +\infty$ , c'est-à-dire que  $x$  appartient à  $D$ .

Les points  $x$  n'appartenant pas à  $E$  qui sont points d'accumulation de  $E$  de côté droit (c'est-à-dire qui sont limites de suites décroissantes de points de  $E$ ) forment donc un ensemble au plus dénombrable  $D_1$  (contenu dans  $D$ ). Or les points qui sont points d'accumulation de  $E$  de gauche, sans l'être de droite, forment, comme on sait, un ensemble au plus dénombrable  $D_2$ . L'ensemble  $E + D_1 + D_2$  sera évidemment fermé. Il en résulte ( $D_1 + D_2$  étant au plus dénombrable) que  $E$  est un  $G_\delta$ . Les ensembles  $E(f(x) \geq A)$  sont donc des  $G_\delta$ ; d'où il résulte, comme on sait, que  $f(x)$  est une fonction de classe  $\leq 2$ , c. q. f. d.

**Théorème II:** Si la dérivée  $f'_+(x)$  est presque partout finie,  $f(x)$  est une fonction mesurable ( $L$ ).

La démonstration est tout à fait analogue à la précédente: on prouve que l'ensemble  $E(f(x) \geq A)$  + un ensemble de mesure nulle est fermé, d'où il résulte que  $f(x)$  est mesurable ( $L$ ).

Comme conséquences immédiates nous obtenons les propositions:

Une fonction non mesurable ( $B$ ) a une dérivée de Dini infinie dans un ensemble non dénombrable de points.

Une fonction non mesurable ( $L$ ) a une dérivée de Dini infinie dans un ensemble de mesure positive ou dans un ensemble non mesurable ( $L$ ).