Sur les fonctions dérivées des fonctions discontinues.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Les quatres fonctions dérivées de Dini ($\overline{f'_+}(x), \underline{f'_+}(x), \overline{f'_-}(x), \underline{f'_-}(x)$) d'une fonction continue $f(x)$ sont, comme on le sait, des fonctions de classe $\leqslant 2$ de M. Baire. Un raisonnement qui m'a été communiqué récemment par M. Rajchman et dans lequel il s'agit de fonctions dérivées de fonctions discontinues [1]), m'engagea à étudier les fonctions dérivées de fonctions mesurables (B). Dans cette Note nous démontrerons ce

Théorème: Les fonctions dérivées de Dini d'une fonction $f(x)$ mesurable (B) sont mesurables (B).

Il suffira évidemment de démontrer qu'une de dérivées de Dini de $f(x)$, p. e. $\overline{f'_+}(x)$, est mesurable (B) (pour toute fonction $f(x)$ mesurable (B)).

Lemme I: Soient δ_1 et $\delta_2 > \delta_1$ deux nombres positifs, $f(x)$ — une fonction quelconque, $\varphi(x)$ — une fonction continue [2]), $F(x)$ — la borne supérieure (finie ou infinie) de tous les nombres

$$(1) \qquad \frac{f(x+h)-\varphi(x)}{h} \quad \text{pour} \quad \delta_1 < h < \delta_2.$$

Thèse: $F(x)$ est une fonction semi-continue inférieurement.

Démonstration. Soit x un nombre réel donné, ε un nombre positif donné. Il s'en suit de la définition du nombre $F(x)$, comme

[1]) Les résultats de M. Rajchman ne seront pas publiés: ils sont généralisés par M. Banach (voir sa note dans les *C. R.* t. 173).

[2]) Il suffirait même de supposer que $\varphi(x)$ est semi-continue supérieurement.

borne supérieure de nombres (1), l'existence d'un nombre h_0 pour lequel subsistent les inégalités

$$\delta_1 < h_0 < \delta_2 \tag{2}$$

et

$$\frac{f(x+h_0) - \varphi(x)}{h_0} > F(x) - \frac{\varepsilon}{4} \text{ [1]}. \tag{3}$$

La fonction $\varphi(x)$ étant continue, il existe un nombre $\delta_0 = \delta_0(x, \delta_1, \varepsilon)$ tel que l'inégalité

$$|x - x'| < \delta_0 \tag{4}$$

entraîne l'inégalité

$$\varphi(x) - \varphi(x') > -\frac{\delta_1 \varepsilon}{4}. \tag{5}$$

Or, désignons par δ un nombre positif tel que

$$\delta < \delta_0 \tag{6}$$

$$\delta < h_0 - \delta_1, \quad \delta < \delta_2 - h_0 \tag{7}$$

et

$$4\delta \,.\, |f(x+h_0)| < \varepsilon \delta_1^2, \quad 4\delta \,.\, |\varphi(x)| < \varepsilon \delta_1^2 \tag{8}$$

et soit x' un nombre réel quelconque satisfaisant à l'inégalité

$$|x - x'| < \delta. \tag{9}$$

Posons $h' = x + h_0 - x'$: nous aurons $x - x' = h' - h_0$, donc d'après (9) et (7):

$$\delta_1 < h' < \delta_2. \tag{10}$$

D'après $x' + h' = x + h_0$ nous trouvons:

$$\frac{f(x'+h') - \varphi(x')}{h'} = \frac{f(x+h_0) - \varphi(x)}{h_0} + \frac{h_0 - h'}{h\, h_0} f(x+h_0) + \\ + \frac{\varphi(x) - \varphi(x')}{h'} - \frac{h_0 - h'}{h' h_0} \varphi(x). \tag{11}$$

D'après (9) nous avons $|h_0 - h'| = |x - x'| < \delta$ et, d'après (2) et (10): $h' h_0 > \delta_1^2$, donc

$$\left| \frac{h_0 - h'}{h' h_0} \right| < \frac{\delta}{\delta_1^2} \tag{12}$$

[1]) Dans le cas $F(x) = +\infty$ le côté droit de l'inégalité (3) doit être remplacé par un nombre positif donné quelconque A.

et, d'après (8):

$$(13) \qquad \left|\frac{h_0 - h'}{h' h_0} f(x+h_0)\right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

D'après (9) et (6) nous avons l'inégalité (4) qui entraîne (5), donc, d'après (10):

$$(14) \qquad \frac{\varphi(x) - \varphi(x')}{h'} > -\frac{\varepsilon}{4}.$$

D'après (12) et (8) nous trouvons

$$(15) \qquad \left|\frac{h_0 - h'}{h' h_0} \varphi(x)\right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

La formule (11) donne, d'après (3), (13), (14), et (15):

$$\frac{f(x'+h') - \varphi(x')}{h'} > F(x) - \varepsilon$$

ce qui démontre, d'après la définition de $F(x')$ et d'après (10), que

$$(16) \qquad F(x') > F(x) - \varepsilon \text{ [1]}.$$

Nous avons donc démontré l'existence (pour x, δ_1, δ_2, ε) d'un nombre positif δ tel que l'inégalité (9) entraîne l'inégalité (16), ce qui prouve que $F(x)$ est une fonction semi-continue inférieurement [2]. Notre lemme est ainsi démontré.

Lemme II: Soient δ_1 et $\delta_2 > \delta_1$ deux nombres positifs, $f(x)$ et $\varphi_0(x)$ deux fonctions donées, $\varphi_n(x)$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ une suite de fonctions convergente vers $\varphi_0(x)$, $F_n(x)$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ la borne supérieure (finie ou infinie) de l'ensemble E_n de tous les nombres

$$(17) \qquad \frac{f(x+h) - \varphi_n(x)}{h}, \quad \text{pour} \quad \delta_1 < h < \delta_2.$$

Thèse:

$$(18) \qquad F_0(x) = \lim_{n=\infty} F_n(x).$$

Dém. Soit x un nombre réel donné, ε un nombre positif donné.

[1]) Dans le cas $F(x) = +\infty$ nous obtenons au lieu de (16) l'inégalité $F(x') > A - \varepsilon$.

[2]) Une fonction $F(x)$ admettant des valeurs infinies est dite semi-continue inférieurement au point x pour lequel $F(x) = +\infty$, s'il existe pour tout nombre A donné un nombre positif δ tel que $F(x') > A$ pour $|x - x'| < \delta$.

D'après $\lim\limits_{n=\infty}\varphi_n(x)=\varphi_0(x)$ il existe un nombre μ tel que

(19) $$|\varphi_n(x)-\varphi_0(x)|<\delta_1\varepsilon \quad \text{pour} \quad n\geqslant\mu.$$

Or il résulte de (19) que

$$\left|\frac{f(x+h)-\varphi_0(x)}{h}-\frac{f(x+h)-\varphi_n(x)}{h}\right|=\left|\frac{\varphi_n(x)-\varphi_0(x)}{h}\right|<\frac{\delta_1\varepsilon}{h}<\varepsilon$$

pour $\delta_1<h<\delta_2$, $n>\mu$, d'où l'on conçlut que pour tout nombre z de l'ensemble E_n (où $n>\mu$) existe un nombre ζ de l'ensemble E_0 qui diffère de z à moins que de ε (et vice versa). Donc les bornes supérieures des ensembles E_n (où $n>\mu$) et celle de E_0 diffèrent à moins que de ε si elles sont finies et sont égales sinon. Donc

$$|F_n(x)-F_0(x)|<\varepsilon \quad \text{pour} \quad n>\mu$$

si $F_0(x)$ est fini, et $F_n(x)=F_0(x)$ pour $(n>\mu)$ si $F_0(x)=+\infty$. Toutefois nous avons la formule (18). Le lemme II est ainsi établi

Lemme III: Soient δ_1 et $\delta_2>\delta_1$ deux nombres positifs, $f(x)$ une fonction quelconque, $\varphi(x)$ — une fonction de classe $\leqslant\alpha$ de M. Baire, $F(x)$ — la borne supérieure (fini ou infinie) de l'ensemble de tous les nombres

$$\frac{f(x+h)-\varphi(x)}{h} \quad \text{pour} \quad \delta_1<h<\delta_2.$$

Thèse: $F(x)$ est une fonction de classe $\leqslant\alpha+1$.

Dém. D'après le lemme I notre lemme III est vrai pour $\alpha=0$ (les fonctions semi-continues étant, comme on sait, de classe $\leqslant 1$). Supposons-le vrai pour les classes $<\alpha$ et soit $\varphi(x)$ une fonction de classe $\leqslant\alpha$. Nous pouvons donc poser

(20) $$\varphi(x)=\lim_{n=\infty}\varphi_n(x),$$

où $\varphi_n(x)$ est une fonction de classe $\alpha_n<\alpha$. Désignons par $F_n(x)$ la borne supérieure de tous les nombres (17): $F_n(x)$ sera donc une fonction de classe $\leqslant\alpha_n+1\leqslant\alpha$ (notre lemme étant vrai, d'après l'hypothèse, pour les classes $<\alpha$). Or, d'après (20) et le lemme II, nous avons

$$F(x)=\lim_{n=\infty}F_n(x);$$

$F_n(x)$ est donc limite de fonctions de classes $\leqslant\alpha$, donc une fonction de classe $\leqslant\alpha+1$. Notre lemme III est ainsi démontré.

Nous allons maintenant démontrer notre théorème. Soit $f(x)$ une fonction donnée de classe α, δ_1 et $\delta_2 > \delta_1$ deux nombres positifs. D'après le lemme III (pour $\varphi(x) = f(x)$) la borne supérieure $\Phi(x, \delta_1, \delta_2)$ de tous les nombres

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \text{pour} \quad \delta_1 < h < \delta_2$$

est une fonction de x de classe $\leqslant \alpha + 1$.

Or nous avons évidemment

$$\overline{f'_+}(x) = \lim_{n=\infty}\left[\lim_{m=\infty} \Phi\left(x, \frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)\right],$$

ce qui prouve que $\overline{f'_+}(x)$ est une fonction de classe $\leqslant \alpha + 3$. Notre théorème est ainsi démontré (Remarquons qu'en modifiant notre démonstration on pourrait prouver que les fonctions dérivées d'une fonction de classe $\leqslant \alpha$ sont des fonctions des classes $\leqslant \alpha + 2$).

Observons qu'il n'existe pas de borne supérieure pour les classes de fonctions dérivées de fonctions mesurables (B). En effet, soit E un ensemble quelconque, dense dans l'ensemble de tous les nombres réels ainsi que son complémentaire CE et définissons la fonction $f(x)$ comme égale à 0 dans E et à 1 dans CE. Il est bien évident que nous aurons $\varphi(x) = \overline{f'_+}(x) = +\infty$ dans E et $\varphi(x) = 0$ dans CE, donc $E(\varphi(x) > 0) = E$. Soit α un nombre ordinal donné quelconque $< \Omega$: on voit sans peine qu'on peut choisir E de sorte que $f(x)$, donc aussi $\varphi(x)$, soit une fonction mesurable (B) de classe $\geqslant \alpha$. Si E serait un ensemble non mesurabrable (B ou L), il en serait évidemment de même avec $f(x)$ et $\varphi(x)$. Donc: les fonctions dérivées (de fonctions non mesurables L) peuvent être non mesurables (L). On voit en même temps sans peine qu'il existe des fonctions mesurables (L) dont les dérivées de Dini sont non mesurables (B). Or la question s'impose: les fonctions dérivées d'une fonction mesurable (L) sont-elles nécessairement mesurables (L)?[1]

[1] Ce problème est résolu affirmativement par M. Banach voir ce volume, p. 128.