ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

Sur quelques invariants d'Analysis Situs.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

1. Appelons F_ϱ les ensembles de points (situés dans un espace à m dimensions) qui sont différences de deux ensembles fermés, $F_{\varrho\varrho}$ — les ensembles qui sont différences de deux ensembles F_ϱ. Dans la Note „Sur les différences de deux ensembles fermés" [1]) nous avons démontré avec M. Kuratowski qu'*un ensemble homéomorphe d'un F_ϱ est un F_ϱ* [2]). Dans ce paragraphe je démontrerai ce

Théorème I: Un ensemble homéomorphe d'un $F_{\varrho\varrho}$ est un $F_{\varrho\varrho}$.

Lemme I: *Un $F_{\varrho\varrho}$ est une somme de deux F_ϱ.*

Démonstration. Soit E un $F_{\varrho\varrho}$: nous pouvons donc poser

$$E = (A - B) - (C - D),$$

où A, B, C et D sont des ensembles fermés. Or on vérifie sans peine l'identité

$$(1) \qquad (A - B) - (C - D) = [A - (B + C)] + (AD - B).$$

Les ensembles A, B, C, D étant fermés, $B + C$ et AD les sont aussi: le côté droit de la formule (1) est donc une somme de deux F_ϱ. Notre lemme est ainsi démontré.

Lemme II: *Une somme de deux F_ϱ est un $F_{\varrho\varrho}$.*

Démonstration. Soit E une somme de deux F_ϱ: nous avons donc

$$E = (A - B) + (C - D),$$

[1]) *Tôhoku Math. Journ.* 1921.

[2]) La démonstration de ce théorème s'appuie sur la remarque que pour qu'un ensemble E soit un F_ϱ, il faut et il suffit qu'il existe pour tout point p de E une sphère S entourant p et telle que l'ensemble ES soit fermé.

où A, B, C, D sont fermés. Or on vérifie sans peine l'identité

$$(2)\qquad (A-B)+(C-D)=[(A+C)-BD]-[(B+D)-(AD+CB)].$$

Les ensembles A, B, C, D étant fermés, $A+C$, BD, $B+D$ et $AD+CB$ les sont aussi: le côté droit de la formule (2) est donc un $F_{\varrho\varrho}$ et le lemme II est démontré [1]).

Soit maintenant E un $F_{\varrho\varrho}$, H — un ensemble homéomorphe de E. E étant un $F_{\varrho\varrho}$, nous pouvons poser, d'après le lemme I: $E=M+N$ où M et N sont des F_ϱ. Par conséquent, H étant homéomorphe de E, nous aurons $H=P+Q$, où P et un ensemble homéomorphe de M et Q un ensemble homéomorphe de N. Or, d'après le théorème mentionné sur les F_ϱ, les ensembles P et Q, comme homéomorphes des ensembles F_ϱ, sont des F_ϱ. L'ensemble $H=P+Q$ est donc une somme de deux F_ϱ, donc, d'après le lemme II, un $F_{\varrho\varrho}$.

Notre théorème est ainsi démontré.

2. Appelons $F_{\sigma\varrho}$ tout ensemble qui est une différence de deux F_σ (c'est-à-dire de deux sommes d'infinités dénombrables d'ensembles fermés) [2]).

Théorème II: Un ensemble homéomorphe d'un $F_{\sigma\varrho}$ est un $F_{\sigma\varrho}$.

Démonstration [3]). Soit P un $F_{\sigma\varrho}$. Nous pouvons donc poser

$$(3)\qquad P=(F_1+F_2+F_3+\dots)-(H_1+H_2+H_3+\dots),$$

où F_n et H_n $(n=1, 2, 3,\dots)$ sont des ensembles fermés qu'on peut encore supposer bornés. Désignons par G_n le complémentaire de H_n: les ensembles $G_n=\mathrm{C}(H_n)$ seront des ensembles ouverts et, d'après (3), nous aurons:

$$(4)\qquad P=(F_1+F_2+F_3+\dots)G_1G_2G_3\dots.$$

Soit Q un ensemble homéomorphe de P. Nous désignerons resp. par $\varphi(p)$, $\varphi(M)$ les images dans Q du point p de P, et du sous-ensemble M de P, par $\psi(q)$, $\psi(N)$ les images inverses.

[1]) Le lemme II permet de prouver sans peine l'existence d'un $F_{\varrho\varrho}$ qui n'est pas un F_ϱ: p. e. l'ensemble composé de points intérieurs à une circonférence et d'un point de cette circonférence.

[2]) Quant aux ensembles $F_{\varrho\sigma}$ et $F_{\varrho\varrho\sigma}$, sommes d'infinités dénombrables des F_ϱ resp. des $F_{\varrho\varrho}$, on voit sans peine qu'ils coïncident avec les F_σ.

[3]) Cf. S. Mazurkiewicz: Über Borelsche Mengen. *Bull. Ac. Cracovie* 1916 et W. Sierpiński: Sur les ensembles mesurables *B*. *Comptes Rendus* t. 171 (note du 5 juillet 1920).

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

Soit k un indice donné, p un point donné de P, $q=\varphi(p)$. La correspondance entre P et Q étant bicontinue et p étant intérieur à G_k (puisque G_k est un ensemble ouvert contenant P), il existe une sphère Σ ayant q pour centre et telle que l'ensemble $\psi(Q\Sigma)$ est contenu dans une sphère (fermée) S contenue dans G_k. Soit Γ_k la somme d'intérieurs de toutes les sphères Σ correspondant ainsi aux points p de P: ce sera donc un ensemble ouvert.

Or posons

$$\Phi_n=\varphi(PF_n)+[\varphi(PF_n)]' \qquad (n=1, 2, 3,\ldots) \tag{5}$$

— ce seront des ensembles fermés.

Posons

$$E=(\Phi_1+\Phi_2+\Phi_3+\ldots)\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3\ldots. \tag{6}$$

Nous démontrerons que $E=Q$. La démonstration que $Q\subset E$ n'offre pas de difficulté (puisque $\varphi(PF_n)\subset\Phi_n$ et $Q\subset\Gamma_k$ pour n et k naturels): il nous reste donc à prouver que $E\subset Q$.

Supposons, par contre, qu'il existe un point g de E qui n'appartient pas à Q. D'après (6), g étant un point de E, il existe un indice m tel que g appartient à Φ_m. Or nous avons évidemment $\varphi(PF_m)\subset\varphi(P)=Q$: le point g n'appartenant pas à Q, g n'appartient non plus à $\varphi(PF_m)$, donc, d'après (5), nous concluons que g est un point d'accumulation de $\varphi(PF_m)$. Il existe donc une suite infinie q_n $(n=1, 2, 3,\ldots)$ de points de $\varphi(PF_m)$ convergente vers g. Posons $p_n=\psi(q_n)$: ce seront des points de l'ensemble borné F_m: la suite p_n $(n=1, 2, 3,\ldots)$ est donc bornée. On peut donc extraire de la suite p_n une suite convergente, soit p'_n. Posons $p=\lim p'_n$: les points p'_n appartenant à l'ensemble fermé F_m, il sera de même avec p. Posons encore $q'_n=\varphi(p'_n)$: la suite q'_n sera évidemment extraite de la suite q_n et nous aurons $\lim q'_n=g$. Je dis que p est un point de P. Le point p appartenant à F_m il suffira, d'après (4), de démontrer que p appartient à G_k pour tout indice k.

Soit donc k un indice donné; g, comme point de E, appartient, d'après (6), à Γ_k. Il s'en suit donc de la définition de l'ensemble Γ_k qu'il existe une sphère Σ dont g est un point intérieur, telle que l'ensemble $\psi(Q\Sigma)$ est contenu dans une sphère S contenue dans G_k. Le point g étant intérieur à Σ, les points q'_n aux indices suffisamment grands appartiennent à Σ, donc à $Q\Sigma$, et parsuite les points correspondants p'_n à S. Donc (S étant fermé) $p=\lim p'_n$ sera un point de S, donc aussi de G_k, c. q. f. d.

Le point p appartient donc à P. D'après $\lim p'_n = p$ et $\lim \varphi(p'_n) = \lim q'_n \neq g$, la fonction φ étant continue dans P, il résulte que $g = \varphi(p)$: donc g est un point de Q, contrairement à l'hypothèse. Nous avons donc démontré que $E \subset Q$.

Donc $Q = E$ et, d'après (6), nous pouvons écrire

$$Q = (\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \ldots) - (C\Gamma_1 + C\Gamma_2 + C\Gamma_3 + \ldots),$$

ce qui prouve (les ensembles $C\Gamma_n$, comme complémentaires d'ensembles ouverts, étant fermés) que Q est un $F_{\sigma\varrho}$. Notre théorème II est ainsi démontré.

3. Appellons $F_{\sigma\varrho\varrho}$ tout ensemble qui est une différence de deux $F_{\sigma\varrho}$.

Soit E un $F_{\sigma\varrho\varrho}$: nous pouvons donc poser $E = (A - B) - (C - D)$ où A, B, C, D sont des F_σ. Les sommes et les produits de deux F_σ étant, comme on sait, des F_σ, il résulte de la formule (1) que E est une somme de deux $F_{\sigma\varrho}$. Tout $F_{\sigma\varrho\varrho}$ est donc une somme de de deux $F_{\sigma\varrho}$.

Or soit E une somme de deux $F_{\sigma\varrho}$, donc $E = (A - B) + (C - D)$, où A, B, C, D sont des F_σ. D'après (2) on en conclus sans peine que E est un $F_{\sigma\varrho\varrho}$. Toute somme de deux $F_{\sigma\varrho}$ est donc un $F_{\sigma\varrho\varrho}$.

Les ensembles $F_{\sigma\varrho\varrho}$ coïncident donc avec les sommes de deux $F_{\sigma\varrho}$ ces derniers étant des invariants d'Analysis Situs (§ 2), il en résulte le même pour les $F_{\sigma\varrho\varrho}$. Nous avons donc ce

Théorème III: Un ensemble homéomorphe d'un $F_{\sigma\varrho\varrho}$ est un $F_{\sigma\varrho\varrho}$.

Quant aux ensembles $F_{\sigma\varrho\sigma}$ (sommes d'infinités dénombrables des $F_{\sigma\varrho}$), on voit sans peine qu'ils coïncident avec les ensembles $G_{\delta\sigma}$ et parsuite sont des invariants d'Analysis Situs (puisque, d'après M. Mazurkiewicz (l. c.), les G_δ les sont). Paraillement les $F_{\varrho\varrho\sigma}$ coïncident avec les $F_{\sigma\delta}$ et parsuite sont des invariants topologiques, d'après M. Mazurkiewicz[1]).

Remarquons encore que les ensembles $F_{\varrho\delta}$ et $F_{\varrho\varrho\delta}$ (produits d'infinités dénombrables d'ensembles F_ϱ, resp. $F_{\varrho\varrho}$) coïncident avec les G_δ et que les ensembles $F_{\sigma\varrho\delta}$ et $F_{\varrho\sigma\delta}$ coïncident avec les $F_{\sigma\delta}$. Donc les $F_{\varrho\delta}$, $F_{\varrho\varrho\delta}$, $F_{\sigma\varrho\delta}$ et $F_{\varrho\sigma\delta}$ sont des invariants d'Analysis Situs.

[1]) *Fund. Math.* t. II, p. 104.

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki