Sur la dérivabilité terme à terme de séries des fonctions monotones.

Par

Alexandre Rajchman (Varsovie).

1. Dans le volume précédent de ce journal (*Fundamenta Mathematicae,* tome II, page 50) j'ai démontré que la somme d'une série convergente des fonctions non décroissantes, telles que la dérivée de chacune d'elles s'annule presque partout, est une fonction non décroissante à dérivée nulle presque partout.

Dans ce qui suit nous nous proposons de généraliser ce résultat, en démontrant ce

Théorème: Une série convergente de fonctions non décroissantes peut être presque partout différentiée terme à terme.

2. Soient $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x) \dots \varphi_n(x) \dots$ des fonctions non décroissantes (continues ou discontinues) et soit

$$f(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \dots + \varphi_n(x) + \dots \tag{1}$$

la série en question; nous supposons qu'elle converge dans tout un intervalle, pour $0 \leqq x \leqq 1$ par exemple. Nous avons à démontrer:

a) que la série

$$\psi(x) = \varphi_1'(x) + \varphi_2'(x) + \dots + \varphi_n'(x) + \dots \tag{2}$$

converge presque partout;

b) que l'on a presque partout

$$f'(x) = \psi(x). \tag{3}$$

3. Posons

$$S_n(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \dots + \varphi_n(x). \tag{4}$$

Nous pouvons énoncer le lemme suivant:

„soit $E(k, n)$ un ensemble fermé, tel que l'on ait pour tout $x \varepsilon E(k, n)$ et $p \geqq n$

$$S'_p(x) > k; \tag{5}$$

nous affirmons que la variation de $f(x)$ dans $E(k, n)$ n'est pas inférieure à k fois la mesure de $E(k, n)$; en supposant que $E(k, n)$ est situé sur le segment $(0, 1)$, on peut écrire

$$f(1) - f(0) \geqq V_{E(k,n)}[f(x)] \geqq k \,.\, \mathrm{mes}\,(E(k, n)) \tag{6}$$

(mes(E) — désigne la mesure lebesguienne de E; le symbole V a été défini dans la note citée).

Démonstration. D'après le théorème III_2 de la note citée on a pour tout $p \geqq n$

$$S_p(1) - S_p(0) \geqq V_{E(k,n)}[S_p(x)] \geqq k \,.\, \mathrm{mes}\,(E(k, n)) \tag{7}$$

d'après le théorème III_1 de la même note:

$$\lim_{p \to \infty} V_{E(k,n)}[S_p(x)] = V_{E(k,n)}[f(x)]; \tag{8}$$

en rapprochant les formules (7) et (8) (et les définitions (1) et (4)) on trouve l'inégalité (6) c. q. f. d.

4. Le sens des signes de l'inégalité peuvent être renversés simultanément dans la prémisse (5) et dans la deuxième partie de la thèse (6); on peut dire:

„si $F(k, n)$ est un ensemble fermé, tel que l'on ait pour tout $x \varepsilon F(k, n)$ et tout $p \geqq n$

$$S'_p(x) < k \tag{9}$$

(en supposant l'existence de $S'_p(x)$ pour tout $x \varepsilon F(k, n)$ nous supposons a fortiori la continuité de $S_p(x)$ dans $F(k, n)$), alors, en supposant $F(k, n)$ intérieur au segment $(0, 1)$, on peut écrire

$$V_{F(k,n)}[f(x)] \leqq k\, \mathrm{mes}\, F(k, n) \leqq k.\text{“} \tag{10}$$

Démonstration. Il suffit de rapprocher les propositions V_1 et III_1 de la note citée.

5. Maintenant il nous sera facile de prouver que la série (2), dont les termes (comme dérivées des fonctions monotones) sont presque partout définis, converge presque partout.

En effet: soit E l'ensemble des points de divergence de la série (2) situés dans l'intervale $(0, 1)$.

Soit E_k l'ensemble des points du segment $(0, 1)$ caractérisé par la propriété suivante: à chaque $x \varepsilon E_k$ on peut faire correspondre un n tel que l'on ait pour tout $p \geqq n$:

$$(11) \qquad S'_p(x) > k.$$

Tous les termes de la série (2) étant non négatifs, on a pour toute valeur de k

$$(12) \qquad E \subset E_k.$$

Soit $E_{k,n}$ l'ensemble des points du segment $(0, 1)$ caractérisé par ce que l'on a pour tout $x \varepsilon E_{k,n}$ et tout $p \geqq n$:

$$(13) \qquad S'_p(x) > k;$$

on voit sans peine que les ensembles $E_{k,n}$ sont mesurables.

On a évidemment:

$$(14) \qquad E_{k,1} \subset E_{k,2} \subset \dots \subset E_{k,n} \subset \dots$$

$$(15) \qquad E_k = E_{k,1} + E_{k,2} + \dots + E_{k,n} + \dots .$$

Supposons, par l'impossible, que la mesure de E soit différente de zéro et soit $m > 0$ cette mesure. En vertu de la relation (12), la mesure de E_k est pour toute valeur de k au moins égale à m. Donc, par suite des relations (14) et (15), à chaque valeur de k on peut faire correspondre un n, tel que la mesure de $E_{k,n}$ soit plus grande que $\frac{m}{2}$; $E_{k,n}$ contient alors un sous-ensemble fermé de mesure plus grande que $\frac{m}{4}$;

en appliquant à ce sous-ensemble l'inégalité (6) de § 3 on trouve:

$$(16) \qquad f(1) - f(0) \geqq \frac{km}{4}$$

ou bien

$$(17) \qquad m \leqq \frac{4[f(1) - f(0)]}{k}.$$

Les inégalités (16) et (17) étant remplies pour toute valeur de k, on en déduit $m = 0$, ce qui contredit notre hypothèse absurde. Donc E est un ensemble de mesure nulle, c. q. f. d.

6. Il ne nous reste qu'à démontrer que la somme $\psi(x)$ de la série (2) est presque partout égale à $f'(x)$.

Soit A l'ensemble des points ou l'on a:

$$f'(x) > \psi(x) \tag{18}$$

et soit B l'ensemble caractérisé par l'inégalité [1])

$$f'(x) < \psi(x). \tag{19}$$

Nous ne considérons ici, bien entendu, que les points de convergence de (2); les ensembles E et $A+B$ n'ont pas de points communs.

Il s'agit de prouver, que les ensembles A et B sont de mesure nulle.

Soit A_n l'ensemble des solutions de l'inégalité;

$$f'(x) > \psi(x) + \frac{1}{n}; \tag{20}$$

on a évidemment

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots \tag{21}$$

soit $A_{n,p}$ le sous-ensemble de A_n caractérisé par le système formé de l'inégalité (20) et de la suivante:

$$\frac{p-1}{3(n+1)} \leqq \psi(x) < \frac{p}{3(n+1)}. \tag{22}$$

Puisque $\psi(x)$ ne prend pas de valeurs negatives, on peut écrire

$$A_n = A_{n,1} + A_{n,2} + \ldots + A_{n,p} + \ldots \tag{23}$$

Soit enfin $A_{n,p,q}$ le sous-ensemble de $A_{n,p}$ caractérisé par ce qu'à côté des inégalités (20) et (22), *pour tout* $m \geqq q$ subsiste encore l'inégalité suivante:

$$S'_m(x) < \frac{p+1}{3(n+1)}. \tag{24}$$

Par définition (2) on a:

$$\psi(x) = \lim_{m\to\infty} S'_m(x); \tag{25}$$

donc tout point de $A_{n,p}$ appartient à des $A_{n,p,q}$ d'indice q assez élevé; c'est-à-dire on a

$$A_{n,p} = A_{n,p,1} + A_{n,p,2} + \ldots + A_{n,p,q} + \ldots \tag{26}$$

[1]) Un ensemble *caractérisé* par une inégalité c'est l'ensemble des solutions de cette inégalité; de même nous dirons que l'ensemble des solutions d'un système des inégalités ou des équations est *caractérisé* par ce système.

Nous allons prouver que tous les $A_{n,p,q}$ sont de mesure nulle. Supposons, par l'impossible, que la mesure de $A_{n,p,q}$ soit différente de zéro. Alors $A_{n,p,q}$ contient un sous-ensemble fermé F de mesure positive. Puisque $F \subset A_{n,p,q}$, tout point de F remplit les inégalités (20) et (22); par conséquant on a pour tout $x \varepsilon F$

$$f'(x) > \frac{1}{n} + \frac{p-1}{3(n+1)} > \frac{1}{n} + \frac{p-2}{3(n+1)}. \tag{27}$$

En appliquant la propositions III_2 de la note citée, on en déduit:

$$V_F[f(x)] \geqq \left[\frac{1}{n} + \frac{p-2}{3(n+1)}\right] \operatorname{mes}(F). \tag{28}$$

Puisque $F \subset A_{n,p,q}$, tous les points de F remplissent l'inégalité (24) en appliquant le lemme de § 4, on en déduit:

$$V_F[f(x)] \leqq \frac{p+1}{3(n+1)} \operatorname{mes}(F). \tag{29}$$

En rapprochant les inégalités (28) et (29) on trouve:

$$\left[\frac{1}{n} + \frac{p-2}{3(n+1)}\right] \operatorname{mes}(F) \leqq \frac{p+1}{3(n+1)} \operatorname{mes}(F); \tag{30}$$

en divisant par la quantité positive mes (F) et en faisant les simplifications élémentaires, on en déduit

$$\frac{1}{n} \leqq \frac{1}{n+1}. \tag{31}$$

Cetts inégalité ne peut être remplie par ancune valeur positive de n, donc il était absurde de supposer que la mesure de l'un quelconque des $A_{n,p,q}$ puisse être différente de zéro. En vertu des relations (26), (23) et (21) il en résulte, que la mesure de A est égale a zéro.

7. Pour prouver que B est de mesure nulle nous n'avons qu'à reprendre le raisonnement de tout-à-l'heure avec les changements suivants: à la place de l'inégalité (20) on met l'inégalité suivante:

$$f'(x) < \psi(x) - \frac{1}{n}; \tag{20 bis}$$

à la place de (27) il vient alors:

$$f'(x) < \frac{p}{3(n+1)} - \frac{1}{n} < \frac{p+1}{3(n+1)} - \frac{1}{n}; \tag{27 bis}$$

au lieu de l'inégalité (24) on pose

$$(24\ \text{bis})\qquad S'_m(x) > \frac{p-2}{3(n+1)};$$

soit G l'ensemble fermé qui, après ces changements, paraît à la place de F. On a (dans l'hypothèse mes $(B) \neq 0$)

$$(32)\qquad \text{mes}\,(G) > 0.$$

En appliquant le lemme V_1 de la note citée à la fonction $f(x)$ on trouve, en vertu de l'inégalité (27 bis)

$$(28\ \text{bis})\qquad V_G[f(x)] \leqq \left[\frac{p+1}{3(n+1)} - \frac{1}{n}\right] \text{mes}\,(G);$$

le lemme de § 3 de la note présente d'après (24 bis) nous conduit à l'inégalité:

$$(29\ \text{bis})\qquad V_G[f(x)] \geqq \frac{p-2}{3(n+1)}\, \text{mes}\,(G).$$

Les inégalités (32), (28 bis) et (29 bis) conduisent à l'inégalité absurde (31). Donc il serait absurde de nier que B est un ensemble de mesure nulle.

8. En rapprochant les résultats démontrés aux §§ 5, 6 et 7, on peut dire: l'ensemble $E + A + B$ dans lequel la série (2) ne converge pas vers $f'(x)$ est de mesure nulle. c. q. f. d.