Sur un problème concernant les sous-ensembles croissants du continu.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

M. Kuratowski a posé récemment le problème suivant: „*Une classe de sous-ensembles croissants du continu peut-elle avoir une puissance supérieure à celle du continu?*" Autrement dit, existe-il une classe de puissance supérieure à celle du continu, dont les éléments sont des ensembles distincts de nombres réels, tels que de tous deux un est contenu dans l'autre? Ce problème est, comme on voit sans peine, équivalent au suivant, posé antérieurement par M. Knaster: „*Existe-il un ensemble ordonnée linéairement, de puissance supérieure à celle du continu, possédant un sous-ensemble dense de puissance du continu?* Je démontrerai dans cette Note en s'appuyant sur le théorème de M. Zermelo que la réponse y est positive.

Il résulte de l'inégalité de Cantor $2^{2^{\aleph_0}} > 2^{\aleph_0}$ qu'il existe des nombres cardinaux $\aleph$ satisfaisant aux inégalités

$$\aleph \leqq 2^{\aleph_0} \quad \text{et} \quad 2^{\aleph} > 2^{\aleph_0}$$

(tel est p. e. $\aleph = 2^{\aleph_0}$): soit $\aleph_\alpha$ le plus petit d'entre eux: nous aurons donc

$$\aleph_\alpha \leqslant 2^{\aleph_0}, \tag{1}$$

$$2^{\aleph_\alpha} > 2^{\aleph_0} \tag{2}$$

et

$$2^{\aleph} \leqslant 2^{\aleph_0} \quad \text{pour} \quad \aleph < \aleph_\alpha. \tag{3}$$

Désignons par ω_α le plus petit nombre ordinal de puissance $\aleph_\alpha$ et considérons l'ensemble U de toutes les suites transfinies du type ω_α

$$(4) \qquad a_1, a_2, \ldots, a_\omega, a_{\omega+1}, \ldots, a_\xi, \ldots \qquad (\xi < \omega_\alpha)$$

dont les termes a_ξ sont égaux à 0 ou à 1.

L'ensemble U sera évidemment de puissance $2^{\aleph_\alpha}$, donc, d'après (2), de puissance supérieure à celle du continu. Ordonnons-le d'après la méthode de premières différences (c'est-à-dire regardons de deux suites (4) celle comme antérieure, dans laquelle le premier terme différent du terme correspondant de l'autre suite est plus petit que son correspondant).

Désignons par D le sous-ensemble de U, formé de toutes ces suites (4) dans lesquelles tous les termes à partir d'une certaine place sont nuls. Calculons la puissance de l'ensemble D.

Nous pouvons regarder l'ensemble D comme une somme d'ensembles

$$(5) \qquad D = D_1 + D_2 + \ldots + D_\omega + D_{\omega+1} + \ldots + D_\xi + \ldots \qquad (\xi < \omega_\alpha)$$

où D_λ désigne l'ensemble de toutes ces suites (4), dans lesquelles nous avons $a_\xi = 0$ pour $\xi \geqslant \lambda$. L'ensemble D_λ a, comme on voit sans peine, la puissance $2^{\bar{\lambda}}$ ($\bar{\lambda}$ désignant le nombre cardinal correspondant au nombre ordinal λ), d'où, d'après (5):

$$(6) \qquad \overline{\overline{D}} \leqslant \sum_{\xi < \omega_\alpha} 2^{\bar{\xi}}$$

Pour $\xi < \omega_\alpha$ nous avons évidemment (ω_α étant le plus petit nombre ordinal de puissance $\aleph_\alpha$): $\bar{\xi} < \aleph_\alpha$, donc, d'après (3): $2^{\bar{\xi}} \leqslant 2^{\aleph_0}$ pour $\xi < \omega_\alpha$; l'inégalité (6) donne donc, si l'on remarque que la somme (6) contient $\aleph_\alpha$ termes:

$$\overline{\overline{D}} \leqslant 2^{\aleph_0} \cdot \aleph_\alpha.$$

d'où, d'après (1):

$$(7) \qquad \overline{\overline{D}} \leqslant 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}.$$

Or, d'après (2), nous avons évidemment $\aleph_\alpha > \aleph_0$ et $\omega_\alpha > \omega$, d'où, d'après (5):

$$(8) \qquad \overline{\overline{D}} \geqslant \overline{\overline{D}}_\omega = 2^{\aleph_0}.$$

Les inégalités (7) et (8) donnent

$$\overline{\overline{D}} = 2^{\aleph_0}$$

ce qui démontre que l'ensemble D a la puissance du continu.

Nous allons maintenant démontrer que l'ensemble D est dense dans U. Soient

(9) $$a'_1,\ a'_2, \dots,\ a'_\omega,\ a'_{\omega+1}, \dots,\ a'_\xi, \dots \qquad (\xi < \omega_\alpha)$$

et

(10) $$a''_1,\ a''_2, \dots,\ a''_\omega,\ a''_{\omega+1}, \dots,\ a''_\xi, \dots \qquad (\xi < \omega_\alpha)$$

deux suites distinctes données de U, et supposons que les premiers termes différents sont d'ordre μ, c'est-à-dire que

$$a'_\xi = a''_\xi \quad \text{pour} \quad \xi < \mu \quad \text{et} \quad a'_\mu \neq a''_\mu,$$

p. e. $a'_\mu < a''_\mu$, c'est-à-dire

$$a'_\mu = 0, \quad a''_\mu = 1.$$

Posons $a_\xi = a''_\xi$ pour $\xi \leqslant \mu$ et $a_\xi = 0$ pour $\xi > \mu$: la suite

$$a_1,\ a_2, \dots,\ a_\omega,\ a_{\omega+1}, \dots,\ a_\xi, \dots \qquad (\xi < \omega_\alpha)$$

appartiendra évidemment à D et elle sera dans U postérieure à la suite (9) et antérieure à la suite (10) ou identique avec cette suite. Il existe donc dans tout intervalle de l'ensemble U au moins un élément de l'ensemble D, ce qui prouve que D est dense dans U (Remarquons que si l'on supprime de U les suites (4) dont les termes sont à partir d'une certaine place $=1$, on obtient un ensemble V de puissance égale à celle de U, contenant D et tel qu'entre deux quelconques de ses éléments se trouve une infinité d'éléments de D).

L'ensemble D ayant la puissance du continu, il existe une correspondance biunivoque entre les éléments de D et les nombres réels. Soit u un élément donné de U, $D(u)$ — le sous-ensemble de D constitué par les éléments de D qui précèdent u dans U. Je dis que $D(u) \neq D(u')$ pour $u \neq u'$ En effet, soit p e. $u \prec u'$: nous avons vu qu'il existe un élément d de D tel que $u \prec d$ et que $d \prec u'$ ou bien $d = u'$: un tel élément d appartiendra toutefois à $D(u')$ sans appartenir à $D(u)$, ce qui donne $D(u) \neq D(u')$, c. q. f. d.

Les ensembles $D(u)$ correspondant aux éléments u de U forment donc une classe d'ensembles croissants et cette classe sera de puissance supérieure à celle du continu (comme égale à celle de U). En substituant à la place des $D(u)$ les ensembles de nombres réels correspondants (d'après la correspondance biunivoque entre les éléments de D et les nombres réels), nous arrivons a une classe K

d'ensembles croissants de nombres réels de puissance supérieure à celle du continu.

Or la question s'impose: *quelle peut être la puissance d'une classe d'ensembles croissants de nombres réels?* Il est évident qu'elle est toujours $\leqslant 2^{2^{\aleph_0}}$, mais peut-elle être quelconque $\leqslant 2^{2^{\aleph_0}}$? Nous prouverons que la réponse est positive si l'on admet que la puissance du continu est *aleph-un*. En effet, si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, nous avons $2^{\aleph_1} > \aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ et $\aleph_\alpha = \aleph_1$ est le plus petit nombre cardinal satisfaisant à l'inégalité (2). L'ensemble U des suites (4), donc aussi la classe K, ont dans ce cas la puissance $2^{\aleph_1} = 2^{2^{\aleph_0}}$ Soit maintenant $\mathfrak{m}$ un nombre cardinal $\leqslant 2^{2^{\aleph_0}}$: il suffira d'envisager une sous-classe de K de puissance $\mathfrak{m}$, pour voir qu'une classe d'ensembles croissants de nombres réels peut avoir une puissance quelconque $\leqslant 2^{\mathfrak{c}}$, si l'on admet que $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$ [1]).

Observons que notre raisonnement pourrait être sans peine généralisé aux ensembles d'une puissance quelconque. En modifiant légèrement notre démonstration. on pourrait prouver que pour tout nombre cardinal $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ existe un ensemble ordonné de puissance $> \mathfrak{m}$ contenant un sous-ensesemble dense de puissance $\mathfrak{m}$ (Pour $\mathfrak{m} < 2^{\aleph_0}$ un tel ensemble est, comme on voit aisément, le continu linéaire ordinaire; pour $\mathfrak{m} > 2^{\aleph_0}$ il suffirait de repeter notre démonstàtion en remplaçant $2^{\aleph_0}$ par $\mathfrak{m}$).

[1]) Observons que la proposition suivante est équivalente à l'hypothese du continu ($2^{\aleph_0} = \aleph_1$): *L'ensemble de tous les nombres réels est une somme d'ensembles croissants dénombrables.*