Sur la décomposition d'un domaine en deux sous-ensembles punctiformes.

Par

Stefan Mazurkiewicz (Varsovie).

Une décomposition d'un carré en deux sous-ensembles punctiformes sans points communs a été executée par moi et par M Sierpiński de deux manières différentes [1]). Il n'y était pas question de la classe des deux sous-ensembles punctiformes, que l'on obtient, en supposant que ce soient des ensembles de Borel, ce qui n'a pas été étudié non plus. Dans la note présente je me propose de rechercher une décomposition d'un domaine plan fermé en deux ensembles de Borel, punctiformes, sans point communs, et de la plus petite classe possible. La solution du problème peut se mettre sous la forme suivante·

1. Théorème I. *Prémisse: A est un domaine plan. Thèses: il n'existe aucune / il existe une décomposition $A = A_1 + A_2$ telle que:* 1) $A_1 \times A_2 = 0$; 2) *A_1 et A_2 sont punctiformes;* 3ª) *A_1 est un F_σ (donc A_2 un G_δ);* 3ᵇ) *A_1 est un $F_{\sigma\delta}$ (donc A_2 un $G_{\sigma\delta}$).*

Il suffit évidemment de considérer la décomposition d'un carré arbitraire.

Première partie.

2. Lemme: *Prémisses: A, B, C sont des ensembles bornés et fermés; A est punctiforme; $A \supset B + C$; $B \times C = 0$. Thèse: il existe une décomposition de A en deux ensembles fermés A_1 et A_2, sans points communs, telle que $A_1 \supset B$, $A_2 \supset C$.*

Démonstration. α) La thèse est certainement vraie si B et C

[1]) Bull. Acad. Cracovie, 1918.

se réduisent à des points. β) Supposons que B seulement se réduit au seul point b. A étant punctiforme, il existe pour tout point $x \subset C$ une décomposition $A = A_1(x) + A_2(x)$, telle que:

(1) $$A_1(x) \times A_2(x) = 0$$

(2) $$b \subset A_1(x); \quad x \subset A_2(x)$$

les ensembles $A_1(x)$ et $A_2(x)$ étant fermés. Posons

(3) $$\lambda(x) = \tfrac{1}{2}\varrho[x, A_1(x)]$$

et désignons par $K(x)$ l'intérieur du cercle de centre x et de rayon $\lambda(x)$. D'après la définition de $K(x)$, on a:

(4) $$[A \times K(x)] \subset A_2(x).$$

D'autre part on a evidement:

(5) $$C \subset \sum_{x \subset C} K(x)$$

donc, d'après le théorème de Heine-Borel, il existe dans C une suite finie: $x_1, x_2 \ldots x_n$, telle que:

(6) $$C \subset \sum_{i=1}^{n} K(x_i).$$

Posons maintenant:

(7) $$A_1 = \prod_{i=1}^{n} A_1(x_i); \quad A_2 = \sum_{i=1}^{n} A_2(x_i)$$

ces deux ensembles sont fermés et $A_1 + A_2 = A$. D'après (1) on a $A_1 \times A_2 = 0$, d'après (2) — A_1 contient b. Enfin (4) et (6) entraînent:

(8) $$C \subset \sum_{i=1}^{n} [A \times K(x_i)] \subset \sum_{i=1}^{n} A_2(x_i) = A_2.$$

Le lemme est ainsi démontré dans le cas β).

γ) Cas géneral. D'après β) il existe pour tout point $y \subset B$ une décomposition $A = A^{(1)}(y) + A^{(2)}(y)$, telle que:

(9) $$A^{(1)}(y) \times A^{(2)}(y) = 0; \quad y \subset A^{(1)}(y); \quad C \subset A^{(2)}(y)$$

$A^{(1)}(y)$ et $A^{(2)}(y)$ étant fermés. La démonstration s'achève par un raisonnement exactement analogue à celui, qui nous a permis d'établir β).

3. Lemme. *Prémisse: A est un ensemble F_δ punctiforme. Thèse: pour tout $x \subset A$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une décomposition $A = A_1 + A_2$, telle que:*

(10) $$A_1 \times \overline{A}_2 = \overline{A}_1 \times A_2 = 0$$

(11) $$x \subset A_1$$

(12) $$\delta(A_1) \leqq \varepsilon.$$

Démonstration. On a d'après la prémisse:

(13) $$A = \sum_{n=1}^{\infty} B_n$$

les B_n étant fermés. On peut en outre supposer, que les B_n sont bornés et que $x \subset B_1$, enfin que $B_n \subset B_{n+1}$ $(n = 1, 2 \dots)$. Désignons par S l'ensemble de points y assujéttis à la condition:

(14) $$\varrho(y, x) \geqq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour tout ensemble fermé G et tout $\lambda > 0$, $G(\lambda)$ désignera l'ensemble de points y assujéttis à l'inégalité:

(15) $$\varrho(y, G) \leqq \lambda.$$

Formons maintenant deux suites d'ensembles: $\{C_n\}$ et $\{D_n\}$, et une suite de constantes positives: $\{\beta_n\}$, remplissant les conditions suivantes:

I $\quad C_n$ et D_n sont fermés:

II $\quad C_n + D_n = B_n$

III $\quad C_n \times D_n = 0$

IV $\quad C_{n-1} \subset C_n; \quad D_{n-1} \subset D_n \qquad n \geqq 2$

V $$\left[\sum_{k=1}^{n} C_k(\beta_k)\right] \times \left[S + \sum_{k=1}^{n} D_k(\beta_k)\right] = 0.$$

Nous déterminons ces trois suites de manière suivante.

a) C_1 et D_1 sont deux ensembles fermés, assujéttis aux conditions:

(16) $$C_1 + D_1 = B_1$$

(17) $$x \subset C_1; \quad (B_1 \times S) \subset D_1$$

(18) $$C_1 \times D_1 = 0$$

il existe de tels ensembles d'après **2.** (16), (17), (18) entraînent:

$$(19) \qquad C_1 \times S = 0.$$

Posons encore $\beta_1 = \frac{1}{3}\varrho(C_1, S + D_1)$, — c'est un nombre positif. On aura pour $y \subset C_1(\beta_1)$, $z \subset D_1(\beta_1) + S$:

$$(20) \qquad \varrho(C_1, S + D_1) \leqq \varrho(C_1, y) + \varrho(y, z) + \varrho(z, S + D_1) \leqq 2\beta_1 + \\ + \varrho(y, z) \leqq \tfrac{2}{3}\varrho(C_1, S + D_1) + \varrho(y, z),$$

$$(21) \qquad \varrho(y, z) \geqq \tfrac{1}{3}\varrho(C_1, S + D_1) > 0$$

donc:

$$(22) \qquad C_1(\beta_1) \times [S + D_1(\beta_1)] = 0$$

on voit ainsi, que les conditions I, II, III, V sont remplies pour $n = 1$.

b) Supposons que pour $n = 1, 2 \ldots m$ les C_n, D_n, β_n sont déterminés et les conditions I, II, III, IV et V satisfaites. D'après **2** il existe deux ensembles fermés C_{m+1}, D_{m+1}, assujéttis aux conditions:

$$(23) \qquad C_{m+1} + D_{m+1} = B_{m+1}$$

$$(24) \qquad \left[B_{m+1} \times \sum_{k=1}^{m} C_k(\beta_k)\right] \subset C_{m+1}; \quad \left[B_{m+1} \times \left(S + \sum_{k=1}^{m} D_k(\beta_k)\right)\right] \subset D_{m+1}$$

$$(25) \qquad C_{m+1} \times D_{m+1} = 0$$

Ces relations entraînent:

$$(26) \qquad \left[C_{m+1} + \sum_{k=1}^{m} C_k(\beta_k)\right] \times \left[D_{m+1} + S + \sum_{k=1}^{m} D_k(\beta_k)\right] = 0.$$

Posons $\beta_{m+1} = \frac{1}{3}\varrho\left[C_{m+1} + \sum_{k=1}^{m} C_k(\beta_k),\ D_{m+1} + S + \sum_{k=1}^{m} D_k(\beta_k)\right]$, c'est un nombre positif. On aura pour $y \subset \sum_{k=1}^{m+1} C_k(\beta_k)$, $z \subset S + \sum_{k=1}^{m+1} D_k(\beta_k)$:

$$(27) \qquad \varrho\left[C_{m+1} + \sum_{k=1}^{m} C_k(\beta_k),\ S + D_{m+1} + \sum_{k=1}^{m} D_k(\beta_k)\right] \leqq \\ \leqq \varrho\left[C_{m+1} + \sum_{k=1}^{m} C_k(\beta_k),\ y\right] + \varrho(y, z) + \\ + \varrho\left[z,\ S + D_{m+1} + \sum_{k=1}^{m} D_k(\beta_k)\right] \leqq 2\beta_{m+1} + \varrho(y, z),$$

$$(28)\quad \varrho(y,z) \geqq \varrho\left[C_{m+1}+\sum_{k=1}^{m} C_k(\beta_k),\ D_{m+1}+S+\sum_{k=1}^{m} D_k(\beta_k)\right]-2\beta_{m+1} =$$

$$\| \ \tfrac{1}{3}\varrho\left[C_{m+1}+\sum_{k=1}^{m} C_k(\beta_k),\ S+D_{m+1}+\sum_{k=1}^{m} D_k(\beta_k)\right] > 0$$

donc:

$$(29)\qquad \left[\sum_{k=1}^{1+m} C_k(\beta_k)\right] \times \left[S+\sum_{k=1}^{m+1} D_k(\beta_k)\right] = 0.$$

Comme $C_m \subset C_m(\beta_m)$ et $C_m \subset B_m \subset B_{m+1}$ (24) entraîne:

$$(30)\qquad C_m \subset C_{m+1}$$

et on aura de même:

$$(31)\qquad D_m \subset D_{m+1}.$$

Les relations (23), (25), (29), (30), (31) montrent que les conditions I—V sont satisfaites encore pour $n = m+1$.

Posons maintenant:

$$(32)\qquad A_1 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n; \quad A_2 = \sum_{n=1}^{\infty} D_n.$$

On aura d'après (13) et II:

$$(33)\qquad A = A_1 + A_2$$

IV et (17) entraînent (11). — D'après V:

$$(34)\qquad A_1 \times S = S \times \sum_{n=1}^{\infty} C_n \subset S \times \sum_{n=1}^{\infty} C_n(\beta_n) = 0$$

donc on aura en vertu de la définition de S — l'inégalité (12). Enfin d'après V on aura pour tout entier n:

$$(35)\quad C_n(\beta_n) \times A_2 = C_n(\beta_n) \times \sum_{k=1}^{\infty} D_k \subset C_n(\beta_n) \times \sum_{k=1}^{\infty} D_k(\beta_k) = 0$$

donc d'après la définition de $C_n(\beta_n)$:

$$(36)\qquad \varrho(C_n, A_2) \geqq \beta_n,$$

$$(37)\qquad C_n \times \overline{A_2} = 0,$$

$$(38)\qquad A_1 \times A_2 = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \times A_2) = 0.$$

La seconde relation (10) se démontre de même. Notre lemme est ainsi établi. D'après un théorème général de M. Sierpiński [1]) notre lemme entraîne le

4. Théorème II. *Un ensemble F_σ punctiforme est homéomorphe avec un ensemble linéaire.*

5. On obtient de même, comme corollaire immédiat de **3** l'énoncé suivant. *Un ensemble F_σ punctiforme n'est pas connexe.*

6. Démonstration de la prémière thèse du Théorème I. Considérons une décomposition d'un carré Q en deux sous-ensembles punctiformes Q_1; Q_2 sans points commun. On sait que Q_1 et Q_2 sont connexes [2]), donc, d'après **5** aucun de ces ensembles n'est pas un F_σ c. q. f. d.

Deuxième partie.

7. Pour démontrer la deuxième thèse du Théorème I, nous utiliserons l'ensemble E de M. Sierpiński [3]) et les ensembles $E(\alpha, \beta, \varepsilon)$ qui s'y rattachent et que j'ai défini dans une Note: „Sur les ensembles quasi-connexes" [4]). Nous conserverons les notations de cette Note.

8. Désignons par $F(\alpha, \beta, \varepsilon)$ l'ensemble que l'on obient de $E(\alpha, \beta, \varepsilon)$ par la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour du centre du carré $H_0 = R(0, 1, 0, 1)$.

9. Rangeons les nombres rationnels intérieurs à l'intervalle $0 < \xi < 1$ en une suite infinie $\{\sigma_n\}$ et posons:

(39) $$\varepsilon_n = \frac{\sigma_n(1-\sigma_n)}{n},$$

(40) $$H_1 = \sum_{n=1}^{\infty} [E(\sigma_n, \tfrac{1}{2}, \varepsilon_n) + F(\sigma_n, \tfrac{1}{2}, \varepsilon_n)],$$

(41) $$H_2 = H_0 - H_1.$$

On a d'après (39):

(42) $$0 < \varepsilon_n \begin{cases} < \sigma_n \\ < 1 - \sigma_n \end{cases}$$

donc $H_1 \subset H_0$ et d'après (41):

[1]) Fundamenta math. t. II, p. 89.
[2]) Sierpiński, Fundamenta math. t. II, p. 94.
[3]) Sierpiński, Fundamenta math. t. II, p. 83
[4]) Fundamenta math. t. II, p. 202.

$$H_0 = H_1 + H_2, \tag{43}$$

$$H_1 \times H_2 = 0. \tag{44}$$

Je dis que (43) est la décomposition cherchée du carré H_0.

10. L'ensemble $E(\sigma_n, \frac{1}{2}, \varepsilon_n)$ et par suite $F(\sigma_n, \frac{1}{2}, \varepsilon_n)$ — est un G_δ; donc d'après (40) H_1 *est un* $G_{\delta\sigma}$, H_2 — *un* $F_{\sigma\delta}$.

11. Lemme. *Prémisse: C est un continu. Thèse: $C-E$ contient un continu.*

Démonstration. α) C contient deux points d'abscisses différentes. La projection $\Gamma(C)$ de C sur l'axe d'abscisses est un segment de droite. Comme celle de E est un ensemble parfait non dense on a:

$$\Gamma(C) - \Gamma(E) \neq 0. \tag{45}$$

Soit ξ_1 un point de $\Gamma(C) - \Gamma(E)$, $\varrho_1 = \varrho(\xi_1, \Gamma(E))$, p_1 un point de C, dont la projection est ξ_1, K_1 le cercle de centre p_1 et de rayon $\frac{1}{2}\varrho_1$. D'après un lemme de Janiszewski[1]) $K_1 \times C$ contient un continu C_1. D'après la signification de ϱ_1 on a:

$$\varrho(p, E) \geqq \varrho_1 \tag{46}$$

donc:

$$C_1 \times E \subset K_1 \times E = 0, \tag{47}$$

$$C_1 \subset C - E \tag{48}$$

et le lemme est démontré. β) Dans le cas contraire C est un segment d'une parallele à l'axe des ordonnées, donc $C \times E$ se réduit à un point[2]) et le lemme est certainement vérifié.

12. On peut remplacer dans l'énoncé de **11** l'ensemble E par $E(\alpha, \beta, \varepsilon)$ resp. $F(\alpha, \beta, \varepsilon)$, — car ces ensembles s'obtiennent de E par une transformation biunivoque et bicontinue du plan.

13. Soit C un continu borné. Formons la suite $\{C_n\}$ $n = 1, 2 \ldots$ de manière suivante:

$$C_1 = C \tag{49}$$

C_{2k} est un continu contenu dans $C_{2k-1} - E(\sigma_k, \frac{1}{2}, \varepsilon_k)$; $k = 1, 2 \ldots$
C_{2k+1} est un continu contenu dans $C_{2k} - F(\sigma_k, \frac{1}{2}, \varepsilon_k)$; „ „
C_n étant fermé et borné on a:

$$\prod_{n=1}^{\infty} C_n = C_0 \neq 0. \tag{50}$$

[1]) Janiszewski: Thèse p. 22.
[2]) Mazurkiewicz: C. c. p. 201.

D'après la définition des C_n:

$$(51)\qquad C_0 \times E(\sigma_k, \tfrac{1}{2}, \varepsilon_k) \subset C_{2k} \times E(\sigma_k, \tfrac{1}{2}, \varepsilon_k) = 0,$$

$$(52)\qquad C_0 \times F(\sigma_k, \tfrac{1}{2}, \varepsilon_k) \subset C_{2k+1} \times F(\sigma_k, \tfrac{1}{2}, \varepsilon_k) = 0$$

donc:

$$(53)\qquad C_0 \times H_1 = 0,$$

$$(54)\qquad C - H_1 \supset C_0 - H_1 = C_0 - (C_0 \times H_1) = C_0 \neq 0.$$

On voit ainsi que H_1 ne contient aucun continu borné, donc H_1 *est punctiforme.*

14. Nous dirons, qu'un continu C *traverse* le rectangle $R(a,b,c,d)$, si: 1) $C \subset R(a,b,c,d)$ 2) C a des points communs avec chacune des droites: $\xi = a$, $\xi = b$.

15. En désignant par λ et μ deux nombres positifs, nous poserons:

$$(55)\qquad T(a, c, \lambda, \mu) = R(a, a+\lambda, c-\lambda-\mu, c-\lambda) +$$
$$+ R(a-\lambda, a+\lambda, c-\lambda, c+\lambda) + R(a-\lambda, a, c+\lambda, c+\lambda+\mu)$$

cette figure est un octagone.

16. Nous dirons, que le continu C *traverse* l'octagone $T(a,c,\lambda,\mu)$, si: 1) $C \subset T(a,c,\lambda,\mu)$, 2) C a des points communs avec chacune des deux lignes brisées, dont la première se compose de trois segments:

$$(56)\qquad \xi = a,\ c-\lambda-\mu \leqq \eta \leqq c-\lambda;\quad \eta = c-\lambda,\ a-\lambda \leqq \xi \leqq a;$$
$$\xi = a-\lambda,\ c-\lambda \leqq \eta \leqq c+\lambda+\mu$$

la deuxième de trois segments:

$$(57)\qquad \xi = a+\lambda,\ c-\lambda-\mu \leqq \eta \leqq c+\lambda;\quad a \leqq \xi \leqq a+\lambda,\ \eta = c+\lambda;$$
$$\xi = a,\ c+\lambda \leqq \eta \leqq c+\lambda+\mu.$$

17. En utilisant le lemme cité de Janiszewski, dans la forme, que j'ai donnée à ce lemme dans une note antérieure on obtient facilement les résultats suivants:

I. Si $c_1 \leqq c < d \leqq d_1$ et si C traverse $R(a, b, c, d)$, alors C traverse $R(a, b, c_1, d_1)$,

II. Si $a \leqq a_1 < b_1 \leqq b$ et si C traverse $R(a, b, c, d)$, alors C contient un sous-continu C_1, qui traverse $R(a_1, b_1, c, d)$,

III. Si $a < b$, $c < d$, $\lambda < \dfrac{b-a}{2}$, $\lambda < \dfrac{d-c}{2}$ et si C traverse

$R(a, b, c, d)$, alors C contient un sous-continu C_1, qui traverse $T\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}, \lambda, \frac{d-c}{2}-\lambda\right)$,

IV. Si C traverse $T(a, c, \lambda, \mu)$ et si:

$$C \times R(a-\lambda,\ a+\lambda,\ c-\lambda,\ c+\lambda) = 0 \tag{58}$$

alors C traverse un des deux rectangles: $R(a, a+\lambda, c-\gamma-\mu, c-\lambda)$ et $R(a-\lambda, a, c, c+\lambda, c+\lambda+\mu)$ donc aussi, d'après I — un des deux rectangles: $R(a, a+\lambda, c-\lambda-\mu, c)$ et $R(a-\lambda, a, c, c+\lambda+\mu)$.

18. Lemme: *Prémisses:* 1) *C traverse $H = R(a, b, c, d)$,* 2) *C ne contient pas le centre de ce rectangle. Thèse: il existe un sous-continu C_1 de C et un entier $\bar{n}_1$ tels que C_1 traverse $R_{n_1}(H)$.*

Démonstration: On peut évidemment supposer $a < b$, $c < d$. La distance entre le centre de H et C est positive. Soit λ un nombre positif inférieur à la fois à la moitié de cette distance, à $\frac{d-c}{2}$ et à $\frac{b-a}{2}$. D'après III C contient un sous-continu C_2 qui traverse $T\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}, \lambda, \frac{d-c}{2}-\lambda\right)$. D'autre part on a:

$$C \times R\left(\frac{a+b}{2}-\lambda,\ \frac{a+b}{2}+\lambda,\ \frac{c+d}{2}-\lambda,\ \frac{c+d}{2}+\lambda\right) = 0 \tag{59}$$

donc à fortiori:

$$C_2 \times R\left(\frac{a+b}{2}-\lambda,\ \frac{a+b}{2}+\lambda,\ \frac{c+d}{2}-\lambda,\ \frac{c+d}{2}+\lambda\right) = 0 \tag{60}$$

on peut donc appliquer IV. Il en résulte, que C_2 traverse soit $R\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}+\lambda, c, \frac{c+d}{2}\right)$ soit $R\left(\frac{a+b}{2}-\lambda, \frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}, d\right)$. Dans le premier cas nous poserons $n_1 = 2n_2$, dans le second $n_1 = 2n_2 - 1$, n_2 désignant le premier entier n tel que:

$$\frac{b-a}{2^{2n-1}} \leqq \lambda. \tag{61}$$

On a les inégalités:

$$\begin{gathered}\frac{a+b}{2} < \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2^{2n_2}} < \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2^{2n_2-1}} < \frac{a+b}{2} + \lambda \\ \frac{a+b}{2} - \lambda < \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2^{2n_2-1}} < \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2^{2n_2}} < \frac{a+b}{2}.\end{gathered} \tag{62}$$

Comme dans le premier cas

$$R_{n_1}(H) = R\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2^{2n_2}},\ \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2^{2n_2-1}},\ c,\ \frac{c+d}{2}\right)$$

dans le second:

$$R_{n_1}(H) = R\left(\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2^{2n_2-2}},\ \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2^{2n_2}},\ \frac{c+d}{2},\ d\right),$$

on voit, que en vertu de (62) et de **17**, II C_2 contient un sous-continu C_1, qui traverse $R_{n_1}(H)$ et le lemme est démontré.

19. Lemme. *Prémisse: C traverse le rectangle $H_0 = R(0, 1, 0, 1)$. Thèse: $C \times E \neq 0$.*

Démonstration[1]. Si:

$$C \times Q \neq 0 \tag{63}$$

on aura à fortiori $C \times E \neq 0$, car $Q \subset E$. Supposons maintenant:

$$C \times Q = 0. \tag{63}$$

Alors, en vertu de **18**, on peut déterminer une suite d'entiers: $\{m_k\}$ et une suite de continus: $\{C_k\}$, $k = 1, 2 \ldots$ de manière que C_k traverse $R_{m_1, m_2 \ldots m_k}$ et que l'on ait:

$$C_1 \subset C;\ C_{k+1} \subset C_k. \tag{65}$$

Comme on a:

$$C_k \subset R_{m_1, m_2 \ldots m_k} \tag{66}$$

il en résulte:

$$E \supset P \supset \prod_{k=1}^{\infty} R_{m_1, m_2 \ldots m_k} \supset \prod_{k=1}^{\infty} C_k \tag{67}$$

$$C \supset \prod_{k=1}^{\infty} C_k \tag{68}$$

donc, comme $\prod\limits_{k=1}^{\infty} C_k \neq 0$, les C_k étant fermés, on aura:

$$C \times E \neq 0 \qquad \text{c. q. f. d.} \tag{69}$$

20. Il s'ensuit immédiatement que l'on aura:

$$C \times E(\sigma_k, \tfrac{1}{2}, \varepsilon_k) \neq 0 \tag{70}$$

pour tout continu C, qui traverse $R(\sigma_k - \varepsilon_k, \sigma_k + \varepsilon_k, 0, 1)$.

[1] J'emploie les symboles P, Q dans le même sens que M. Sierpiński dans le mémoire cité: *Fundamenta math.* p. 83.

21. Soit maintenant C un continu quelconque contenu dans le carré H_0. Supposons que C contient deux points d'abscisse différente. En désignant par a_1 le mininum, par b_1 le maximum des abscisses de C on aura $0 \leqq a_1 < b_1 \leqq 1$ et C traverse evidémment $R(a_1, b_1, 0, 1)$. L'ensemble des σ_k est dense dans l'intervalle $0 < \xi < 1$, et $\lim\limits_{k=0} \varepsilon_k = 0$, donc on peut trouver un entier k_1, tel que:

$$a_1 \leqq \sigma_{k_1} - \varepsilon_{k_1} < \sigma_{k_1} + \varepsilon_{k_1} \leqq b_1. \tag{71}$$

D'après **17**, II C contient un sous-continu C_1 qui traverse $R(\sigma_{k_1} - \varepsilon_{k_1}, \sigma_{k_1} + \varepsilon_{k_1}, 0, 1)$, donc en vertu de **20** on aura:

$$C \times E(\sigma_{k_1}, \tfrac{1}{2}, \varepsilon_{k_1}) \supset C_1 \times E(\sigma_{k_1}, \tfrac{1}{2}, \varepsilon_{k_1}) \neq 0, \tag{72}$$

$$C \times \sum_{k=1}^{\infty} E(\sigma_k, \tfrac{1}{2}, \varepsilon_k) \neq 0. \tag{73}$$

Si C ne contient pas des points d'abscisses différentes, alors il contient surement deux points d'ordonnées différentes et on aura:

$$C \times \sum_{k=1}^{\infty} F(\sigma_k, \tfrac{1}{2}, \varepsilon_k) \neq 0. \tag{74}$$

Donc dans tous les cas:

$$C \times H_1 \neq 0. \tag{75}$$

On voit ainsi que H_2 ne contient aucun continu, c. à d. que H_2 *est punctiforme*. (43) est donc la décomposition cherchée et la deuxiéme thèse du Théorème I est établie.