Quelques propriétés topologiques de la demi-droite.

Par

Casimir Kuratowski (Varsovie).

Le rôle de la demi-droite dans la théorie des continus non-bornés est analogue à celui du segment de droite par rapports aux continus bornés.

On appelle *arc simple* tout ensemble homéomorphe à un segment. La définition suivante s'impose de façon naturelle.

Définition. *J'appelle rayon tout ensemble fermé homéomorphe à une demi-droite* (c'est à dire, à l'ensemble des nombres $x \geqslant 0$); *l'image du sommet de la demi-droite est le sommet du rayon.*

La notion d'arc simple est surtout importante dans la théorie des lignes de Jordan bornées. L'étude de ces lignes a été entreprise par M. Mazurkiewicz[1]). Voici les définitions fondamentales dont il s'est servi:

Un point p d'un continu C est son point de *premier genre*[2]), lorsque pour tout $\delta > 0$ il existe un tel $\varepsilon > 0$ que tout point de C à distance $\leqslant \varepsilon$ de p peut être joint à p par un sous-continu de C de diamètre $\leqslant \delta$.

Un continu (borné ou non) composé uniquement de points du premier genre est une *ligne de Jordan généralisée*.

Comme l'a démontré M. Mazurkiewicz[3]), ces lignes jouissent de la propriété importante que voici

tous deux points a, b d'une ligne de Jordan généralisée peuvent être joints par un arc simple ab situé sur elle.

[1]) *Sur les lignes de Jordan*, Fund. Math. I, 1920, p. 166—209.

[2]) Ibid. p. 170.

[3]) Ibid. p. 201.

Dans la première partie de cette Note je démontre un théorème analogue sur l'existence des rayons dans les lignes de Jordan non-bornées. Dans la seconde j'établis deux conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un ensemble donné soit un rayon.

1. Lemme. Si un point p d'un continu C n'est pas de premier genre, il existe dans C un continu K qui contient p et ne contient aucun point de premier genre de C.

Démonstration. Étant donné un point p du continu C, qui n'est pas son point de premier genre, il existe par définition une sphère R de centre p et une suite de points $\{a_n\}$ assujetties aux conditions:

(1) $$\lim_{n=\infty} a_n = p,$$

(2) tous les a_n appartiennent à $C \times R$,

(3) si un sous-continu de $C \times R$ contient p, il ne contient aucun point de la suite $\{a_n\}$.

Pour un n donné désignons par K_n le plus grand sous-continu de $C \times R$ qui contient a_n. Envisageons l'ensemble d'accumulation A et l'ensemble limite L de la suite $\{K_n\}$ [1]).

D'après (1), p est un point de L, donc de A; p n'est pas le seul point de A; en effet, d'après un théorème de Janiszewski [2]), la frontière de R contient des points de chaque K_n, donc un point de A différent de p.

L'ensemble limite de la suite $\{K_n\}$ n'étant pas vide, son ensemble d'accumulation A est un continu [3]) qui admet p comme élément. Soit K un sous-continu de A contenant p est situé à l'intérieur de R. Je dis qu'aucun point de K n'est un point de premier genre de C.

Supposons, au contraire, qu'un point k de K soit un point de premier genre de C. Il existe par définition une telle sphère S contenant k que

(4) tout point de $S \times C$ peut être joint à k par un sous-continu de $R \times C$.

[1]) Un point a est dit un point de l'ensemble d'accumulation de la suite $\{K_n\}$, si a est la limite d'une suite de points $k_{n_1}, k_{n_2}, \ldots k_{n_i}, \ldots$ appartenant respectivement à $K_{n_1}, K_{n_2}, \ldots K_{n_i}, \ldots$. Ce point est dit un point de l'ensemble limite, s'il est la limite d'une suite de points $\{k_n\}$ appartenant respectivement à K_n. (Janiszewski: *Sur les continus irréductibles entre deux points* p. 15, Paris 1911).

[2]) Ibid. p. 23.

[3]) Ibid. p. 20, théorème I.

Comme k est un point d'accumulation de la suite $\{K_n\}$, il existe un point k_m qui appartient à $K_m \times S$, donc à $S \times C$. D'après (4), il existe un sous-continu M de $R \times C$ qui contient k et k_m. Les continus K_m, M et K étant contenus dans $R \times C$, leur somme $K_m + M + K$ est un sous-continu de $R \times C$ qui joint a_m à p, — contrairement à (3). C. Q. F. D.

Ce lemme implique, en particulier, qu'un continu qui n'est pas une ligne de Jordan généralisée contient plus d'un point qui n'est pas de premier genre. C'est, d'ailleurs, la seule conséquence que nous utiliserons dans la suite.

Théorème. *Tout point d'une ligne de Jordan non-bornée est le sommet d'un rayon contenu dans cette ligne.*

Démonstration. Nous allons démontrer ce théorème par la méthode d'inversion.

Soient p un point d'une ligne de Jordan non-bornée C et a un point n'appartenant pas à C. A tout point x de C faisons correspondre le point $\varphi(x)$ assujetti aux conditions:

1° la distance de x à a étant ϱ, celle de $\varphi(x)$ à a est $\frac{1}{\varrho}$,

2° le point $\varphi(x)$ est situé sur la demi-droite qui passe par x et dont le sommet est a.

La fonction $\varphi(x)$ transforme évidemment le continu C en un ensemble homéomorphe $\varphi(C)$; l'ensemble $\varphi(C) + (a)$ est donc un continu. Comme la propriété d'être un point de premier genre est un invariant de l'Analysis Situs [1]), tout point $\varphi(x)$ est de premier genre; a l'est aussi, puisque — d'après le lemme précédent — il ne peut être l'unique point exceptionnel. Soit $r = \varphi(p)$.

Or, le continu $\varphi(C) + (a)$ étant une ligne de Jordan, soit ar un arc simple situé sur cette ligne. Posons $A = ar - (a)$ et envisageons l'ensemble $R = \varphi^{-1}(A)$.

L'ensemble A étant évidemment homéomorphe à une demi-droite, il en est de même de R. Comme, d'autre part, a est la seule lacune de A, on en déduit immédiatement que R est fermé. Conformément à la définition, R est donc un rayon à sommet p et $R \subset C$.

2. Chacune de deux propriétés suivantes est nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble donné E soit un arc simple:

[1]) Mazurkiewicz, l. c. p. 170, théorème I.

(α) E est une ligne de Jordan contenant deux points a et b qui ne sont situés sur aucun vrai sous-continu de E[1]).

Autrement dit: E est une ligne de Jordan irréductible entre deux points.

(β) E est un continu contenant deux points a et b qui ne sont situés sur aucun vrai sous-ensemble connexe de E[2])

Autrement dit: E est un ensemble fermé et connexe irréductible entre deux points.

Voici deux propriétés analogues du rayon.

(α_1) *Pour qu'un ensemble E soit un rayon, il faut et il suffit qu'il soit une ligne de Jordan non-bornée contenant un point p qui n'est situé sur aucun vrai sous-continu non-borné de E.*

Démonstration. La condition est nécessaire. Soit D l'ensemble des nombres réels $x \geqslant 0$ et soit R un rayon quelconque à sommet p. Soit enfin C un sous-continu non-borné de R contenant p. Le rayon R étant l'image biunivoque et bicontinue de la demi-droite D, désignons par B l'image de C dans D.

Comme C est un continu, B est connexe et fermé dans D. Il en résulte que — D étant fermé — B est un continu non-borné contenant le point 0. Parsuite $B = D$, d'où $C = R$.

Il n'existe donc aucun vrai sous-continu non-borné de R admettant p comme élément.

La condition est suffisante. Soit E un continu qui la remplit. E étant une ligne de Jordan non-bornée, il existe — suivant le théorème précédent — un rayon R contenu dans E et contenant p. R étant non-borné par définition, $E = R$ en vertu de l'hypothèse. E est donc un rayon.

(β_1) *Pour qu'un ensemble E soit un rayon, il faut et il suffit qu'il soit un continu non-borné contenant un point p qui n'est situé sur aucun vrai sous-ensemble connexe non-borné de E.*

[1]) La propriété (α) se déduit aisément des théorèmes publiés dans les Mémoires cités des MM. Janiszewski et Mazurkiewicz.

[2]) Knaster et Kuratowski: *Sur les ensembles connexes* p. 224, théorème XXVII.

Démonstration. A l'aide d'un procédé tout à fait analogue à celui de la démonstration précédente on prouve que la condition est nécessaire. Il s'agit de démontrer qu'elle est suffisante.

Supposons que le continu E vérifie cette condition. Nous allons démontrer qu'il ne renferme aucun continu de condensation[1].

Admettons, au contraire, qu'il existe un continu de condensation K de E. On peut évidemment admettre que K est borné et ne contient pas de point p.

Or, K étant borné, $E-K$ ne l'est pas. Comme de plus p appartient à $E-K$, cet ensemble n'est pas connexe. Il renferme donc tout au moins deux composantes[2] M et N.

Deux cas sont à distinguer.

1) $E-K=M+N$. D'où

$$E=\overline{E-K}=\overline{M}+\overline{N}$$

et E étant un continu,

$$\overline{M}\times\overline{N}\neq 0.$$

Soit a un point quelconque de $\overline{M}\times\overline{N}$. Les ensembles M et N étant connexes et a en étant un point limite, la somme

$$M+(a)+N$$

est connexe[3] non-bornée et contient p. Donc,

$$M+(a)+N=E$$

et $K=(a)$, ce qui est absurde.

Il reste à envisager la seconde alternative:

2) $E-K\neq M+N$. Il existe parsuite une troisième composante, soit P, de $E-K$. Soit M la composante de $E-K$ qui admet p comme élément; p est donc élément de $E-N$ et de $E-P$. D'autre part, K étant un sous-ensemble connexe de E, et N et P étant des composantes de $E-K$, les ensembles $E-N$ et $E-P$ sont conne-

[1] Un sous-continu K de E est dit son continu de condensation lorsque $E=\overline{E-K}$. (Janiszewski l. c., p. 24).

[2] Suivant M. Hausdorff, un sous-ensemble M de A est dit une composante de A, lorsque M est connexe et ne peut être augmenté dans A sans devenir non-connexe. Cf. Knaster et Kuratowski, l. c. p. 214.

[3] Ibid. p. 209, théorème IV.

xes [1]) et parsuite bornés. L'inclusion $P \subset E - N$ implique que $E - N$ étant borné, P l'est à plus forte raison. Mais P et $E - P$ étant bornés, leur somme $E = P + (E - P)$ l'est aussi, — contrairement à l'hypothèse.

Il est ainsi établi que le continu E ne renferme aucun continu de condensation Il en résulte [2]) que E est une ligne de Jordan, et comme pour ces lignes la condition de (β_1) implique celle de (α_1), E est un rayon à sommet p.

[1]) Ibid. p. 214, théorème X.

[2]) Mazurkiewicz l. c. p. 176, théorème IV.