Sur les séries de puissances.

Par

Stefan Mazurkiewicz (Varsovie).

1. Le but de cette note est de démontrer le résultat suivant.

A étant un ensemble fermé situé sur la circonférence $|z| = 1$, que je désignerai par C, il existe: I) une série de puissances à coefficients tendant vers zéro, convergente dans tout point de A, divergente dans tout point de $C - A$; II) une série de puissances à coefficients tendant vers zéro, divergente dans tout point de A, convergente dans tout point de $C - A$ [1]).

2. La démonstration sera basée sur les résultats obtenus par M. Neder [2]). M. Neder démontre, qu'il existe pour tout nombre positif $c < 2\pi$ une série de puissance $\mathfrak{P}(z)$ telle que: α) pour tout nombre t assujéti à l'inégalité $0 \leqq t \leqq c$. les sommes partielles de $\mathfrak{P}(e^{it})$ ne sont pas bornées, donc $\mathfrak{P}(e^{it})$ diverge; β) $\mathfrak{P}(e^{it})$ converge pour $c < t < 2\pi$.

La propriété β) peut être remplacée par la suivante: γ) Si $c < c_1 < c_2 < 2\pi$, alors $\mathfrak{P}(e^{it})$ converge uniformément dans l'intervalle $c \leqq t \leqq c_2$. Ceci n'a pas été signalé expréssement par M. Neder, mais résulte immédiatement de sa démonstration.

3. J'utiliserai le terme: „arc de la circonférence C" dans le sens d'arc fermé c. à d. contenant ses extrémités.

4. En utilisant une transformation $z' = ze^{it}$, on peut faire correspondre à tout arc I de la circonférence C une série de puissances $\mathfrak{P}(z; I)$ telle que:

[1]) Pour les séries trigonometriques l'énocé I avait été démontré par M. Rajchman (*C. R. de la Société des Sciences de Varsovie* XI, p. 143—146).

[2]) Zur Konvergenz trigonometrischer Reihen. *Inaugural-Dissertation*, Göttingen 1919 p. 10—14.

α) pour tout $t \subset I$ les sommes partielles de $\mathfrak{P}(e^{it}; I)$ ne sont pas bornées.

β) $\mathfrak{P}(e^{it}; I)$ converge uniformément sur tout arc $K \subset C - I$.

5. Soit:

$$\mathfrak{P}(e^{it}; I) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{nit} \tag{1}$$

à tout nombre $g > 0$ et tout entier N, on peut faire correspondre un entier N_1, de manière qu'il existe pour tout $t \subset I$ un entier $n_t \leqq N_1$, tel que:

$$\left| \sum_{n=N}^{n_t} a_n e^{nit} \right| > g. \tag{2}$$

Démonstration. On a d'après 4 α) pour tout $t \subset I$:

$$\overline{\lim_{k=\infty}} \left| \sum_{n=0}^{k} a_n e^{nit} \right| = \infty \tag{3}$$

donc aussi:

$$\overline{\lim_{k=\infty}} \left| \sum_{n=N}^{N+k} a_n e^{nit} \right| = \infty \tag{4}$$

à tout $t' \subset I$ nous pouvons par suite faire correspondre un entier $m(t')$, tel que:

$$\left| \sum_{n=N}^{m(t')} a_n e^{nit'} \right| > g. \tag{5}$$

Comme $\sum_{n=N}^{m(t')} a_n e^{nit}$ est une fonction continue par rapport à t, on peut déterminer un arc $I(t')$ de manière, que l'on ai pour $t \subset I(t')$:

$$\left| \sum_{n=N}^{m(t')} a_n e^{nit} \right| > g. \tag{6}$$

Tout point t de I est intérieur à un arc $I(t')$, — savoir à $I(t)$, donc d'après le théorème de Heine-Borel on peut déterminer un nombre fini de ces arcs: $I(t'_1), I(t'_2) \dots I(t'_p)$ de manière que:

$$I \subset \sum_{q=1}^{p} I(t'_q). \tag{7}$$

Soit maintenant N_1 le plus grand de nombres entiers: $m(t'_1)$, $m(t'_2) \ldots m(t'_\nu)$. C'est le nombre cherché. En effet, si $t \subset I$, alors pour un indice r:

$$t \subset I(t'_r) \tag{8}$$

donc, si nous posons $n_t = m(t'_r)$ nous aurons bien $n_t \leqq N_1$ et (2).

6 Lemme. Étant donné deux suites d'arcs de la circonférence C: $\{I_n\}$ et $\{K_n\}$, $n=1, 2 \ldots$ assujétis à la condition:

$$I_{r+1} \times K_n = 0, \quad \text{donc} \quad K_n \subset C - I_{n+1} \tag{9}$$

il existe une série de puissances $\mathfrak{P}(z)$, à coefficients tendant vers zéro, telle que $\mathfrak{P}(e^{it})$ diverge pour:

$$t \subset \prod_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=k}^{\infty} I_n \right) = B \tag{10}$$

et converge pour:

$$t \subset \sum_{k=1}^{\infty} \left(\prod_{n=k}^{\infty} K_n \right) = B_1 . \tag{11}$$

Démonstration. Posons:

$$\mathfrak{P}(z; I_n) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(n)} z^k \tag{12}$$

et déterminons une suite d'entiers $N_1 < N_2 < N_p \ldots$ de manière suivante: $N_1 = 1$; N_{p+1} est un entier satisfaisant aux conditions suivantes:

Pour tout $t \subset I_p$ il existe un entier $k_t^{(p)} \leqq N_{p+1} - 1$ tel que:

$$\left| \sum_{k=N_p}^{k_t^{(p)}} a_k^{(p)} e^{kit} \right| > 2^p . \tag{13}$$

Pout tout $t \subset K_p$ et tout entier q' l'inégalité $m' \geqq N_{p+1}$ entraîne:

$$\left| \sum_{k=m'}^{m'+q'} a_k^{(p+1)} e^{kit} \right| \leqq \frac{1}{2^{p+1}} . \tag{14}$$

Un tel entier N_{p+1} existe, en vertu de 5 et de ce que d'après 4 β) et (9) $\mathfrak{P}(e^{it}; I_{p+1})$ converge uniformément sur l'arc K_p.

Soit

$$b_k = a_k^{(p)}, \quad N_p \leqq k \leqq N_{p+1} - 1. \tag{15}$$

La série:

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{k=N_p}^{N_{p+1}-1} a_k^{(p)} z^k \tag{16}$$

est la série cherchée.

En effet, si $t \subset B$, alors t appartient à une infinité d'intervalles I_n soient $I_{p_1}, I_{p_2} \dots I_{p_n} \dots$ ces intervalles. On aura donc d'après (13):

$$\left| \sum_{k=N_{p_n}}^{k_t^{(p_n)}} b_k e^{kit} \right| = \left| \sum_{k=N_{p_n}}^{k_t^{(p_n)}} a_k^{(p_n)} e^{kit} \right| > 2^{p_n} \tag{17}$$

ce qui montre que les sommes partielles de (16) ne sont pas bornées pour $z = e^{it}$, $t \subset B$, — c. à d. la série diverge.

Soit maintenant $t \subset B_1$ et ε un nombre positif. D'après (11) t appartient à tous les K_n, à partir d'un certain indice n_1. Soit n_2 un entier tel que:

$$\frac{1}{2^{n_2}} \leqq \varepsilon \tag{18}$$

enfin n_3 le plus grand des deux entiers: N_{n_1+1} et N_{n_2+1}. Soit p un entier quelconque et:

$$m \geqq n_3. \tag{19}$$

Je dis que l'on aura:

$$\left| \sum_{k=m}^{m+q} b_k e^{kit} \right| \leqq \varepsilon. \tag{20}$$

Soit r le dernier des entiers p pous lesquels $N_p \leqq m$, s le premier entier pour lequel N_{r+s} surpasse $m+q$. On aura:

$$\left| \sum_{k=m}^{m+q} b_k e^{kit} \right| \leqq \left| \sum_{k=m}^{N_{r+1}-1} a_k^{(r)} e^{kit} \right| + \sum_{p=1}^{s-2} \left| \sum_{k=N_{r+p}}^{N_{r+p+1}-1} a_k^{(r+p)} e^{kit} \right| + \left| \sum_{k=N_{r+s-1}}^{m+q} a_k^{(r+s-1)} e^{kit} \right|. \tag{21}$$

D'après (19) et la définition de r on aura

$$r \geqq n_1 + 1, \quad r \geqq n_2 + 1 \tag{22}$$

donc:

(23) $$t \subset K_{r+p-1}, \quad p = 0, 1 \dots s-1.$$

En utilisant (14) on obtient:

(24) $$\left|\sum_{k=m}^{m+q} b_k e^{kit}\right| \leqq \sum_{p=0}^{s-1} \frac{1}{2^{r+p}} < \frac{1}{2^{r-1}} \leqq \frac{1}{2^{r_2}} \leqq \varepsilon$$

c. à d. (20); ε étant arbitraire il en résulte la convergence de (16) pour $z = e^{it}$, $t \subset B_1$. Reste à démontrer que:

(25) $$\lim_{k=\infty} |b_k| = 0$$

(cette question ne se pose naturellement que dans le cas où la mesure de B_1 est zéro). Or quel que soit c le coefficient de z^n dans la série de M. Neder ne surpasse pas $\frac{2}{\sqrt[4]{n}}$, donc il en est de même pour le coefficient de z^n dans toute série $\mathfrak{P}(z; I)$. On a par suite:

(26) $$|b_k| = |a_k^p| \leqq \frac{2}{\sqrt[4]{k}} \qquad N_p < k < N_{p+1}$$

ce qui démontre (25).

7. Pour obtenir le résultat annoncé dans 1 il suffit d'après 6 de démontrer que l'on peut déterminer:

I deux suites d'arcs $\{I_n\}$ et $\{K_n\}$, assujétis à (9) et telles que:

(27) $$\prod_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=k}^{\infty} I_n\right) \supset C - A$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\prod_{n=k}^{\infty} K_n\right) \supset A$$

et II deux suites d'arcs $\{I_n\}$ et $\{K_n\}$, assujétis à (9) et telles, que:

(28) $$\prod_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=k}^{\infty} I_n\right) \supset A$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\prod_{n=k}^{\infty} K_n\right) \supset C - A.$$

8. Considérons d'abord l'ensemble des arcs de la circonférence C, contenus dans $C - A$, dont les extrémités sont de la forme e^{it_1}, e^{it_2}, t_1, t_2, étant rationnels. Cet ensemble est dénombrable rangeons ses éléments en une suite infinie $\{I_n\}$. La première des relations (27) aura évidemment lieu. Comme A est fermé et $I_n \subset C - A$, on aura $\varrho(A, I_n) > 0$. L'ensemble de points e^{it} pour lesquels $\varrho(e^{it}, I_{n+1}) \geqq \geqq \frac{1}{2}\varrho(A, I_{n+1})$ forme un arc de C, que nous désignerons par K_n. On aura (9) et

$$K_n \supset A \tag{29}$$

ce qui entraîne la seconde relation (27).

9. Considérons encore l'ensemble d'arcs de C, de longueur $\frac{1}{p}$ dont le centre est un point de A. Comme A est fermé et tout point de A intérieur à l'un de ces arcs, on peut d'après le théorème de Heine-Borel trouver une suite finie de ces arcs: $I_1^{(p)}, I_2^{(p)} \dots I_{m_p}^{(p)}$ de manière que:

$$\sum_{k=1}^{m_p} I_k^{(p)} \supset A. \tag{30}$$

Posons: $I_k^{(1)} = I_k$; $I_k^{(p+1)} = I_{m_1+m_2+\dots m_p+k}$. On aura en vertu de (32)

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=k}^{\infty} I_n\right) \supset A. \tag{30}$$

Désignons par K_n l'ensemble de points de C, dont la distance de I_{n+1} n'est pas inférieure à $\frac{1}{n+1}$. C'est un arc de C, assujéti à (9). Soit z_1 un point de $C - A$, $\varrho(z_1, A) = \varrho_1$. Déterminons p_1 par la condition $p_1 \geqq \frac{2}{\varrho_1}$ et supposons $n > m_1 + m_2 + \dots + m_{p_1}$. Je dis que $z \subset K_n$. En effet, on aurait dans le cas contraire:

$$\varrho(z_1 I_{n+1}) < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{p_1+1} \tag{31}$$

c. à d. pour un point determiné z_2 de I_{n+1}:

$$\varrho(z_1, z_2) < \frac{1}{p_1+1}. \tag{32}$$

Mais la longueur de I_{n+1} étant $\frac{1}{p_1+1}$ au plus et cet arc contenant un point de A, on aura:

$$(33)\quad \varrho(z_1, A) \leqq \varrho(z_1, z_2) + \varrho(z_2, A) \leqq \frac{1}{p_1+1} < \frac{2}{p_1} < \varrho_1 = \varrho(z_1, A)$$

ce qui est absurde.

Donc z_1 fait partie de $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\prod_{n=k}^{\infty} K_n\right)$. Comme z_1 est un point arbitraire de $C-A$, on aura bien la seconde relation (28) c. q. f. d.