ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

Sur la notion d'isomorphisme des ensembles.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Dans ses Mémoires intéressants sur les antinomies de la théorie des ensembles (parus en 1917) M. Mirimanoff introduit les notions importantes d'ensembles *isomorphes* et de *types de structure* des ensembles [1]).

La notion d'isomorphisme est définie par récurrence. M. Mirimanoff dit que deux ensembles E et F sont isomorphes, s'il est possible d'établir entre les éléments de E et ceux de F une correspondance biunivoque, telle qu'à un élément indécomposable de E (c'est-à-dire élément de E qui n'est pas un ensemble) corresponde un élément indécomposable de F, et à un élément-ensemble E' de E, un élément-ensemble isomorphe F' de F, et réciproquement.

'A mon avis, cette *définition* contient implicitement la *proposition* $\boldsymbol{P}$ suivante:

Il est possible de déterminer, et d'une seule façon, une relation symétrique $\boldsymbol{R}$ entre les ensembles, jouissant des propriétés suivantes:

1) E et F étant deux ensembles donnés, il est toujours déterminé si ces ensembles sont en relation $\boldsymbol{R}$ ou non.

2) Si deux ensembles E et F sont en relation $\boldsymbol{R}$, il existe entre les éléments de E et ceux de F une correspondance biunivoque, telle qu'à un élément indécomposable de E corresponde un élément indécomposable de F, et à un élément-ensemble E' de E, un élément-ensemble F' de F tel que $F' \boldsymbol{R} F$. Réciproquement, si une telle correspondance entre les éléments de E et ceux de F existe, les ensembles E et F sont en relation $\boldsymbol{R}$.

[1]) *L'Enseignement mathématique*, 19e année, 1917, p. 41 et p. 211.

La proposition P est, je pense, loin d'être évidente: elle exige une démonstration rigoureuse, et une telle démonstration semble présenter plusieurs difficultés (Pour les ensembles *ordinaires* (au sens de M. Mirimanoff[1])) on pourrait l'obtenir par l'induction transfinie, en utilisant la notion du *rang* d'un ensemble[2])). Nous donnerons ici une autre définition d'ensembles isomorphes, que voici.

Soit E un ensemble donné. Considérons toutes les suites finies $a_1, a_2, \ldots, a_n$ telles que

$$a_n \varepsilon a_{n-1} \varepsilon a_{n-2} \varepsilon \ldots \varepsilon a_1 \varepsilon E$$ [3])

— nous les appellerons „suites S relatives à l'ensemble E" ou plus simplement „suites de E" [4]).

Définition D. *Nous dirons que deux ensembles E et F sont isomorphes, s'il existe une correspondance biunivoque entre les suites S relatives à l'ensemble E et celles relatives à l'ensemble F, telle qu'à toute suite $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de E corresponde une suite $b_1, b_2, \ldots, b_n$ de F à même nombre de termes, et qu'en supprimant les derniers termes (a_n et b_n) dans deux suites correspondantes (dans le cas $n > 1$) on obtienne encore deux suites correspondantes.*

Notre définition D n'implique évidemment aucun théorème d'existence. Or on voit sans peine qu'elle permet de définir entre les ensembles une relation symétrique R qui satisfait aux conditions 1) et 2).

[1]) l. c. p. 42.
[2]) l. c. p. 51.
[3]) $a \varepsilon b$ signifie: a est un élément de b.
[4]) Cf. la notion de *descente* de M. Mirimanoff, l. c. p. 42 et 211.

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki