Sur l'égalité $2\mathfrak{m} = 2\mathfrak{n}$ pour les nombres cardinaux.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

C'est M. F. Bernstein qui a démontré dans sa Thèse [1]) que l'égalité

$$2\mathfrak{m} = 2\mathfrak{n}$$

entraîne toujours pour les nombres cardinaux $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$ l'égalité

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$$

La démonstration de M. Bernstein est d'aillleurs assez compliquée [2]) et elle ne donne pas une solution directe du problème suivant qui s'y rattache d'une façon naturelle:

Soient M, N, P, Q quatre ensembles donnés, tels que

$$M \sim N, \quad P \sim Q \quad \text{et} \quad M + N \sim P + Q$$

et supposons déterminées les correspondances biunivoques φ, ψ et ϑ respectivement entre les éléments de M et N, de P et Q et de $M+N$ et $P+Q$: il s'agit de déterminer une correspondance biunivoque entre les éléments des ensembles M et P.

C'est une solution de ce problème qui est le but de cette Note.

Nous pouvons évidemment toujours supposer les ensembles M, N, P, Q sans éléments communs deux à deux. m étant un élément

[1]) *„Untersuchungen aus der Mengenlehre"*. Inaugural Dissertation, Halle 1901. Aussi: *Math. Ann.* 61, p 122. La démonstration de M. Bernstein est aussi reproduite par M. Hobson dans sa *Theory of functions of a real variable*. Cambridge 1907, p. 159—162.

[2]) La démonstration du théorème de M. Bernstein donnée par M. Dénes König (*Math. Ann.* 77, p. 462) utilise l'axiome du choix et ne donne aucun moyen d'établir effectivement la correspondance biunivoque en question.

de M, nous désignerons par $\varphi(m)$ cet élément de N qui correspond à m dans la correspondance φ entre M et N; pareillement, n étant un élément de N, nous désignerons par $\varphi(n)$ l'élément correspondant de M; p étant un élément de P, rien ne nous empêche de désigner encore par $\varphi(p)$ cet élément de Q qui correspond à p dans la correspondance ψ entre P et Q; pareillement, q étant un élément de Q, nous désignerons par $\varphi(q)$ l'élément correspondant de P. La fonction $\varphi(a)$ sera ainsi définie pour tout élément a de l'ensemble $T = M + N + P + Q$ et on voit sans peine qu'il est toujours $\varphi^2(a) = a$.

Or, r étant un élément de $M + N$, nous désignerons par $\vartheta(r)$ l'élément de $P + Q$ qui correspond à r dans la correspondance ϑ entre $M + N$ et $P + Q$, et s étant un élément de $P + Q$, nous désignerons par $\vartheta(s)$ l'élément correspondant de $M + N$. La fonction $\vartheta(a)$ sera ainsi définie pour tout élément de l'ensemble T et nous aurons toujours $\vartheta^2(a) = a$.

ψ_1 et ψ_2 étant deux fonctions, nous écrirons, pour abréger. $\psi_1\psi_2(a)$ au lieu de $\psi_1[\psi_2(a)]$ et pareillement pour plusieurs fonctions. Nous écrirons ausi $(\psi_1\psi_2)^2(a)$ au lieu de $\psi_1\psi_2\psi_1\psi_2(a)$ et ainsi de suite.

Posons, pour tout élément a de T: $\chi_0(a) = a$,

$$\chi_1(a)=\vartheta(a),\quad \chi_3(a)=\varphi\vartheta(a),\quad \chi_5(a)=\vartheta\varphi\vartheta(a),\quad \chi_7(a)=\varphi\vartheta\varphi\vartheta(a),\ldots,$$
$$\chi_2(a)=\varphi(a),\quad \chi_4(a)=\vartheta\varphi(a),\quad \chi_6(a)=\varphi\vartheta\varphi(a),\quad \chi_8(a)=\vartheta\varphi\vartheta\varphi(a),\ldots$$

Nous en trouvons sans peine, à cause de $\varphi^2(a) = \vartheta^2(a) = a$:

$$\chi^2_{4k+1}(a) = \chi^2_{4k+2}(a) = a \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$
$$\chi_{4k-1}\chi_{4k}(a) = \chi_{4k}\chi_{4k-1}(a) = a \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots);$$

il existe donc pour tout indice $n > 0$ un indice $n' > 0$ tel que

$$\chi_{n'}\chi_n(a) = \chi_n\chi_{n'}(a) = a.$$

Il en résulte tout de suite que nous avons toujours

(1) $$\chi_n(a) \neq \chi_n(b) \qquad \text{pour} \quad a \neq b.$$

En effet, s'il était

$$\chi_n(a) = \chi_n(b),$$

on aurait

$$a = \chi_{n'}\chi_n(a) = \chi_{n'}\chi_n(b) = b.$$

Pour tout élément a de T nous désignerons par $S(a)$ la suite du type $\omega^*+\omega$:

(2) $$\ldots, \chi_{2k}(a), \ldots, \chi_4(a), \chi_2(a), a, \chi_1(a), \chi_3(a), \ldots, \chi_{2k+1}(a), \ldots$$

Soient x, y, z trois termes consécutifs de la suite $S(a)$: je dis que nous avons soit

(3) $$x=\varphi(y), \qquad z=\vartheta(y),$$

soit

(4) $$x=\vartheta(y), \qquad z=\varphi(y).$$

En effet, y étant un terme de la suite (2), nous avons $y=\chi_n(a)$, où n est un indice $\geqslant 0$ et on a six cas à distinguer:

1° $n=0$: nous avons donc: $y=\chi_0(a)=a$, $x=\chi_2(a)=\varphi(a)$ $z=\chi_1(a)=\vartheta(a)$, ce qui donne les formules (3);

2° $n=1$, donc: $y=\chi_1(a)=\vartheta(a)$, $x=\chi_0(a)=a=\vartheta\vartheta(a)=\vartheta(y)$, $z=\chi_3(a)=\varphi\vartheta(a)=\varphi(y)$ et on trouve les formules (4);

3° $n=4k>0$, donc $y=\chi_{4k}(a)=(\vartheta\varphi)^k(a)$, $z=\chi_{4k-2}(a)=$ $=\varphi(\vartheta\varphi)^{k-1}(a)=\vartheta(\vartheta\varphi)^k(a)=\vartheta(y)$, $x=\chi_{4k+2}(a)=\varphi(\vartheta\varphi)^k(a)=\varphi(y)$ et on a les formules (3);

4° $n=4k+1>1$, donc $y=\chi_{4k+1}(a)=\vartheta(\varphi\vartheta)^k(a)$, $x=\chi_{4k-1}(a)=$ $=(\varphi\vartheta)^k(a)=\vartheta\vartheta(\varphi\vartheta)^k(a)=\vartheta(y)$, $z=\chi_{4k+3}(a)=(\varphi\vartheta)^{k+1}(a)=\varphi(y)$ et on a les formules (4);

5° $n=4k+2$, donc $y=\chi_{4k+2}(a)=\varphi(\vartheta\varphi)^k(a)$, $z=\chi_{4k}(a)=$ $=(\vartheta\varphi)^k(a)=\varphi\varphi(\vartheta\varphi)^k(a)=\varphi(y)$, $x=\chi_{4k+4}(a)=(\vartheta\varphi)^{k+1}(a)=\vartheta(y)$ et on a les formules (4);

6° $n=4k+3$, donc $y=\chi_{4k+3}(a)=(\varphi\vartheta)^{k+1}(a)$, $x=\chi_{4k+1}(a)=$ $=\vartheta(\varphi\vartheta)^k(a)=\varphi(\varphi\vartheta)^{k+1}(a)=\varphi(y)$, $z=\chi_{4k+5}(a)=\vartheta(\varphi\vartheta)^{k+1}(a)=\vartheta(y)$ et on a les formules (3).

Il en résulte tout de suite que, g étant un terme de la suite (2), cette dernière coïncide soit avec la suite

$$\ldots, \varphi\vartheta\varphi(g), \vartheta\varphi(g), \varphi(g), g, \vartheta(g), \varphi\vartheta(g), \vartheta\varphi\vartheta(g), \ldots$$

soit avec la suite

$$\ldots, \vartheta\varphi\vartheta(g), \varphi\vartheta(g), \vartheta(g), g, \varphi(g), \vartheta\varphi(g), \vartheta\varphi\vartheta(g), \ldots,$$

c'est-à-dire, soit avec la suite

(5) $$\ldots, \chi_4(g), \chi_2(g), g, \chi_1(g), \chi_3(g), \ldots,$$

soit avec la suite

$$(6) \qquad \ldots, \chi_3(g), \chi_1(g), g, \chi_2(g), \chi_4(g), \ldots$$

On en déduit que deux suites $S(a)$ et $S(b)$ (correspondant à deux éléments a et b de T) qui ont un terme commun sont identiques ou bien s'obtiennent l'une de l'autre par l'inversion de l'ordre de leurs termes.

Considérons maintenant les éléments de l'ensemble $M+P$ contenus dans la suite (2). Je dis que les éléments de M sont séparés dans la suite (2) par les éléments de P et réciproquement, c'est-à-dire que le premier élément de $M+P$ suivant ou précédant dans la suite (2) un élément de M (resp. de P) est un élément de P (resp. de M). En effet, soit m un élément de la suite (2) appartenant à M et considérons les 6 éléments successifs de cette suite:

$$\varphi\vartheta\varphi(m),\ \vartheta\varphi(m),\ \varphi(m),\ m,\ \vartheta(m),\ \varphi\vartheta(m).$$

D'après la définition de la fonction ϑ, l'élément m appartenant à M, l'élément $\vartheta(m)$ appartient à $P+Q$; s'il appartient à Q, l'élément $\vartheta\varphi(m)$ appartient à P (d'après la définition de la fonction φ). Pareillement $\varphi(m)$ appartient à N et $\vartheta\varphi(m)$ à $P+Q$; si $\vartheta\varphi(m)$ appartient à Q, $\varphi\vartheta\varphi(m)$ appartient à P. Donc les premiers éléments de $M+P$ suivant ou précédant m dans (2) sont des éléments de P. De même on démontre que les premiers éléments de $M+P$ suivant ou précédant dans (2) un élément p de P sont des éléments de M. (On voit aussi sans peine que toute suite (2) contient une infinité de termes appartenant à M et une infinité appartenant à P).

Nous avons vu plus haut que, a et b étant deux éléments de T, les ensembles $S(a)$ et $S(b)$ sont sans élément commun, ou bien sont formés de mêmes éléments. Nous pouvons donc diviser tous les éléments de T en classes, en rangeant dans une même classe K deux éléments a et b de T tels que les suites $S(a)$ et $S(b)$ sont formées de mêmes termes (dans le même ordre ou dans un ordre inverse), et dans les classes différentes deux éléments a et b de T, pour lesquels les suites $S(a)$ et $S(b)$ sont sans élément commun.

Pour déterminer une correspondance biunivoque entre les éléments de l'ensemble M et les éléments de l'ensemble P, il suffira évidemment de définir une loi déterminant une correspondance biunivoque entre les éléments de M et de P dans toute classe K.

Soit donc K une classe donnée; g étant un élement de K, nous pouvons regarder la classe K comme l'ensemble de tous les termes de la suite (5) ou de la suite (6) (le même élément de K pouvant d'ailleurs figurer plusieurs fois dans ces suites). Considérons le plus petit indice $n=\nu$ tel qu'il existe un élément m de MK et un élément p de PK tels que

$$p=\chi_\nu(m).$$

S'il existe pour un élément p de PK un élément m de MK tel que $p=\chi_\nu(m)$, il existe un seul, d'après (1).

Il peut arriver qu'un élément m de MK figure dans les suites (5) et (6) plusieurs fois: or on voit sans peine que chaque fois lui correspondra le même élément $p=\chi_\nu(m)$ de P.

Rangeons en paires les éléments m de MK pour lesquels existe un élément p de P tel que $p=\chi_\nu(m)$ avec les éléments p correspondants et supprimons ces paires de K: soit K_1 la classe qui restera. On voit sans peine que les suites qui resteront de (5) et (6) jouiront encore de cette propriété que les éléments de M (s'il y en restera) seront y séparés par les éléments de P et vice versa.

Considérons maintenant le plus petit indice ν_1 tel qu'il existe un élément m de MK_1 et un élément p de PK_1 tels que

$$p=\chi_{\nu_1}(m)$$

et rangeons en paires les éléments m et p correspondant à cet indice ν_1. En supprimant ces paires de K_1 nous obtiendrons une nouvelle classe K_2 sur laquelle, si elle contiendra encore les éléments de M, nous pourrons opérer comme sur K et K_1, et ainsi de suite. Il s'en suit immédiatement de la définition des nombres ν_i qu'on aura toutefois

$$\nu<\nu_1<\nu_2<\dots$$

Nous avons maintenant deux cas à distinguer:

1) En supprimant les paires d'éléments cerrespondants (m, p) succesivement dans les classes $K, K_1, K_2, \dots$ on parvient à une classe K_ω ne contenant aucun élément de $M+P$. Dans ce cas nous pouvons établir une correspondance biunivoque entre les éléments m de MK et les éléments p de PK en regardant comme correspondants les éléments m et p constituant une paire.

2) L'ensemble $(M+P)K_\omega$ n'est pas vide. Je dis qu'il contient alors un seul élément. Il s'en suit sans peine de la propriété des suites (5) et (6) que les éléments de MK_ω sont toujours séparés

dans ces suites par les éléments de PK_ω et vice versa (puisqu'on obtient deux éléments successifs de $(M+P)K_\omega$, soit r et $s=\chi_n(r)$, en supprimant un nombre fini de paires (m, p) qui se trouvent entre r et s et pour lesquelles les indices ν_i correspondants sont $< n$). Soient donc m et $p=\chi_n(m)$ deux éléments voisins de $(M+P)K_\omega$ et soit j le plus grand indice tel que $\nu_j < n$: on voit sans peine que la paire (m, p) devrait appartenir à K_{j+1}, ce qui est impossible.

Nous avons donc démontré que $(M+P)K_\omega$ se réduit à un seul élément, soit g. Considérons maintenant la suite (5) correspondant à cet élément (suite, formée de tous les éléments de la classe K considérée) et faisons correspondre à tout élément m de MK le premier élément p de PK le suivant (de gauche à droite) dans cette suite, et à tout élément p de PK le dernier élément de MK le précédant dans cette suite. On établit ainsi évidemment une correspondance biunivoque entre les éléments de MK et ceux de PK.

Nous pouvons donc regarder la correspondance biunivoque entre les éléments de l'ensemble M et les éléments de l'ensemble P comme déterminée complètement.