Sur les suites analytiques d'ensembles.

Par

Casimir Kuratowski (Warszawa).

1. ***Propriétés générales.*** Soit $\mu(x)$ une fonction qui fait correspondre à chaque x réel (ou, plus généralement, à chaque x appartenant à un espace complet séparable) un type d'ordre dénombrable. Dans la note *„Les suites transfinies d'ensembles et les ensembles projectifs"* (Fund. Math. 28, p. 186), j'ai défini la notion d'analycité de la fonction $\mu(x)$ comme suit.

Imaginons tous les nombres rationnels de l'intervalle 01 rangés en une suite infinie (d'éléments distincts) $r_1, r_2, \dots$ et faisons correspondre à chaque élément de l'ensemble C de Cantor

$$t = \frac{t^1}{3} + \frac{t^2}{9} + \frac{t^3}{27} + \dots \qquad (t^n = 0 \text{ ou } 2)$$

l'ensemble M_t de tous les r_n tels que $t^n = 2$. Le type d'ordre de l'ensemble M_t étant désigné par $\bar{t}$, *la fonction $\mu(x)$ est dite analytique lorsque l'ensemble $\underset{tx}{E}[\mu(x) = \bar{t}]$ est analytique.*

Voici quelques propriétés des fonctions $\mu(x)$ analytiques. Les ensembles

$$\underset{tx}{E}[\mu(x) \leqslant \bar{t}], \quad \underset{tx}{E}[\bar{t} \leqslant \mu(x)], \quad \underset{tx}{E}[\bar{t} < \mu(x)] \quad \text{et} \quad \underset{tx}{E}[\mu(x) < \bar{t}]$$

sont analytiques; en outre, en posant

$$A_\tau = \mu^{-1}(\tau) = \underset{x}{E}[\mu(x) = \tau],$$

l'ensemble A_τ est analytique et, pour $\tau < \Omega$, il est borelien; la somme $\sum_{\alpha<\Omega} A_\alpha$ est un ensemble CA [1]).

[1]) Voir ma note citée, Fund. Math. 28, p. 189, 6), p. 190 et p. 191, théor. 3.

Les énoncés qui suivent compléterons la liste des propriétés des fonctions $\mu(x)$ analytiques (ils sont bien connus dans le cas particulier où les A_α sont les „constituantes" d'un ensemble CA).

Théorème 1. *A étant un ensemble analytique contenu dans la somme $\sum_{\alpha<\Omega} A_\alpha$, il existe un $\alpha_0 < \Omega$ tel que $A \subset \sum_{\alpha<\alpha_0} A_\alpha$.*

Supposons, par contre, que pour chaque $\alpha < \Omega$, il existe un $\xi \geqslant \alpha$ tel que $A \cdot A_\xi \neq 0$; c. à d. qu'il existe un $x \in A$ tel que $\mu(x) \geqslant \alpha$. L'inégalité $\bar{t} < \Omega$ équivaut, par conséquent, à l'existence d'un $x \in A$ tel que $\mu(x) \geqslant \bar{t}$. En symboles

$$\{\bar{t} < \Omega\} \equiv \sum_x (x \in A)\,[\bar{t} \leqslant \mu(x)], \quad \text{d'où} \quad \underset{t}{E}(\bar{t} < \Omega) = \sum_x \underset{t}{E}(x \in A)[\bar{t} \leqslant \mu(x)].$$

Les ensembles $\underset{tx}{E}(x \in A)$ et $\underset{tx}{E}[\bar{t} \leqslant \mu(x)]$ étant analytiques, il en est de même de l'ensemble $\underset{tx}{E}(x \in A)\,[\bar{t} \leqslant \mu(x)]$ et de sa projection (parallèle à l'axe des x). Mais celle-ci coïncide, selon la formule précédente, avec l'ensemble $\underset{t}{E}(\bar{t} < \Omega)$, qui n'est pas analytique [1]). On parvient ainsi à une contradiction.

Corollaire 1. *Si l'ensemble des nombres ordinaux que la fonction $\mu(x)$ admet comme valeurs est indénombrable, l'ensemble $\sum_{\alpha<\Omega} A_\alpha$ est un CA non analytique.*

Corollaire 2. *La suite transfinie $\{A_\alpha\}$, $\alpha < \Omega$, est convergente dans le sens de catégorie [2]); c. à d. qu'il existe un nombre α_0 tel que l'ensemble $\sum_{\xi \geqslant \alpha_0} A_\xi$ est de première catégorie.*

En effet, comme ensemble CA, l'ensemble $\sum_{\alpha<\Omega} A_\alpha$ jouit de la propriété de Baire, c'est à dire contient un ensemble A de classe G_δ tel que $\sum_{\alpha<\Omega} A_\alpha - A$ est de première catégorie. Il existe donc, selon le théor. 1, un nombre α_0 tel que $A \subset \sum_{\alpha<\alpha_0} A_\alpha$, d'où $\sum_{\xi \geqslant \alpha_0} A_\xi \subset \sum_{\alpha<\Omega} A_\alpha - A$, c. q. f. d.

[1]) d'après un théorème de MM. Lusin et Sierpiński, Journ. de Math. 1923, p. 53. Pour une simple démonstration de ce théorème, voir la note présente p. 57, remarque 1.

[2]) Cette notion est due à M. Hausdorff, Fund. Math. 26, p. 241.

Corollaire 3. *Tout ensemble qui se laisse ranger en une suite du type Ω: $x_0, x_1, \ldots, x_\alpha, \ldots$ telle que $\mu(x_0) < \mu(x_1) < \ldots \mu(x_\alpha) < \ldots < \Omega$, est „toujours de première catégorie“, c. à d. de première catégorie sur tout ensemble parfait.*

Le raisonnement précédent se relativise en effet par rapport à tout ensemble parfait P donné en avance. De sorte que, pour P fixe, il existe un α_0 tel que l'ensemble des x_ξ avec $\xi \geqslant \alpha_0$ (qui appartiennent à P) est de première catégorie sur P, d'où la conclusion demandée.

2. ***Fonction caractéristique du crible.*** On appelle crible (borelien) toute fonction W_r qui fait correspondre à chaque nombre rationnel r de l'intervalle 01 un ensemble borelien W_r (situé dans un espace donné). Posons

$$N_x = \underset{r}{E}(x \in W_r) \qquad \text{et} \qquad \mu(x) = \overline{N}_x \quad (\text{type d'ordre de } N_x).$$

On prouve que *la fonction $\mu(x)$ est analytique*[1]). Elle satisfait donc aux énoncés du N^0 1.

Nous allons envisager à présent une notion qui semble être bien utile dans l'étude des cribles. Appelons *fonction caractéristique du crible $\{W_{r_n}\}$* la fonction $f(x)$ qui fait correspondre à chaque point x le point $t = f(x)$ de l'ensemble C de Cantor tel que $t^n = 2$ ou 0 suivant que x appartient ou non à l'ensemble W_{r_n} [2]).

Bien entendu, $f^n(x)$ est, pour n fixe, la fonction caractéristique de l'ensemble W_{r_n} dans le sens habituel du mot (sauf qu'elle admet la valeur 2 au lieu de 1). Elle est donc *une fonction de Baire* et il en est de même de la fonction $f(x)$. En particulier, si les ensembles W_r sont simultanément fermés et ouverts, la fonction $f(x)$ est continue.

Théorème 2. $\mu(x) = \overline{f(x)}$.

En effet, les équivalences évidentes

$$[r_n \in N_x] \equiv [x \in W_{r_n}] \equiv [f^n(x) = 2] \equiv [r_n \in M_{f(x)}]$$

impliquent que $N_x = M_{f(x)}$, d'où $\overline{N}_x = \overline{M}_{f(x)}$ et $\mu(x) = \overline{f(x)}$.

Corollaire. *En posant* $L_\tau = \underset{t}{E}(\bar{t} = \tau)$, *on a* $A_\tau = f^{-1}(L_\tau)$.

Car $[x \in f^{-1}(L_\tau)] \equiv [f(x) \in L_\tau] \equiv [\overline{f(x)} = \tau] \equiv [\mu(x) = \tau] \equiv [x \in A_\tau]$.

[1]) Fund. Math. 28, p. 192, théorème 1.

[2]) C'est bien, en termes de M. Szpilrajn, la „fonction caractéristique de la suite $W_{r_1}, W_{r_2}, \ldots$“. Cf. Fund. Math. 26, p. 306.

Remarques. 1. Le corollaire précédent permet de démontrer d'une façon très simple le théorème de MM. Lusin et Sierpiński d'après lequel *l'ensemble $\underset{t}{E}(\bar{t} < \Omega)$ n'est pas analytique.*

Soit, en effet, Z un ensemble CA non analytique; tel est, par exemple, un ensemble CA plan, universel par rapport aux ensembles CA linéaires (son intersection avec la diagonale $y = x$ étant non analytique). Soit $\{W_r\}$ un crible (fermé) qui détermine l'ensemble Z, c. à d. que $Z = \underset{x}{E}[\mu(x) < \Omega]$. D'après le corollaire, il vient

$$Z = \sum_{\alpha < \Omega} A_\alpha = \sum_{\alpha < \Omega} f^{-1}(L_\alpha) = f^{-1}[\underset{t}{E}(\bar{t} < \Omega)].$$

La fonction f étant une fonction de Baire (de première classe), l'hypothèse que l'ensemble $\underset{t}{E}(\bar{t} < \Omega)$ est analytique impliquerait que Z l'est également — contrairement à sa définition.

2. *Les ensembles L_α, $\alpha < \Omega$, sont de classes boreliennes non bornées*, c. à d. qu'à chaque $\beta < \Omega$ correspond un L_α qui n'est pas de classe β.

En vertu du corollaire, il suffit de démontrer qu'il existe un crible $\{W_r\}$ qui détermine une suite de constituantes de classes non bornées. Or, comme M. Sierpiński a démontré[1]), si Z est un ensemble CA universel pour les ensembles boreliens linéaires, le crible $\{W_r\}$ qui lui correspond jouit de la propriété en question.

En effet, si l'on suppose que toutes les constituantes A_α de l'ensemble $Z = \sum_{\alpha < \Omega} A_\alpha$ sont de classe borelienne β et si B est un ensemble borelien linéaire qui n'est pas de classe $\beta + 1$, on parvient à une contradiction. Car il existe, par hypothèse, une droite verticale V tel que B coïncide avec $V \cdot Z = \sum_{\alpha < \Omega} V \cdot A_\alpha$ et, d'autre part, selon le théor. 1, il existe un indice α_0 tel que $V \cdot Z \subset \sum_{\alpha < \alpha_0} A_\alpha$, d'où $V \cdot Z = \sum_{\alpha < \alpha_0} V \cdot A_\alpha$, ce qui implique que l'ensemble $V \cdot Z$ (donc l'ensemble B) est de classe $\beta + 1$, contrairement à l'hypothèse.

3. Le théorème 1 permet de démontrer d'une façon très simple le théorème de Souslin, d'après lequel *tout ensemble qui est simultanément de classe A et CA est borelien.*

[1]) Voir Lusin et Sierpiński, C. R. Paris, t. 189 (1929), p. 794.

Soit, en effet, E un ensemble CA et soit $E=\sum_{\alpha<\Omega} A_\alpha$ son développement en constituantes. E étant supposé analytique, il existe, selon le théor. 1, un indice α_0 tel que $E=\sum_{\alpha<\alpha_0} A_\alpha$. Or les ensembles A_α étant boreliens [1]), on en conclut que E l'est également.

3. ***Fonctions ordonnantes.*** Considérons, avec M. Sierpiński [2]), la fonction de trois variables $\varphi(t, m, n)$, où t parcourt l'ensemble C de Cantor et m et n l'ensemble P des entiers positifs, définie comme suit:

$$\varphi(t, m, n)=t^{[m,n]} \quad \text{où} \quad [m, n]=2^{m-1}(2n-1).$$

Bien entendu, la fonction φ n'admet que deux valeurs: 0 et 2. Posons $C_t=\underset{mn}{E}\{\varphi(t, m, n)=2\}$. Désignons par S l'ensemble des t tels que l'ensemble C_t établit un ordre dans P; autrement dit, que: 1° C_t ne contient aucun couple de la forme (m, m), 2° s'il contient (m, n) et (n, p), il contient aussi (m, p) et 3° quels que soient m et $n\neq m$, l'un des deux couples (m, n) ou (n, m) lui appartient toujours.

En symboles logiques:

$$(t \in S) \equiv \prod_m (t^{[m,m]}=0)\cdot\prod_{mnp}\{(t^{[m,n]}=2=t^{[n,p]})\rightarrow(t^{[m,p]}=2)\}\cdot$$
$$\cdot\prod_{m\neq n}\{(t^{[m,n]}=0)\rightarrow(t^{[n,m]}=2)\}.$$

La fonction $t^{[m,n]}$ étant continue, pour m et n fixes, l'ensemble $\underset{t}{E}(t^{[m,n]}=0)$ est simultanément fermé et ouvert. On en conclut aussitôt que *l'ensemble S est fermé*.

Pour $x \in S$, désignons par $\mu(x)$ le type d'ordre établi dans P par l'ensemble C_x. *La fonction $\mu(x)$ est analytique.*

Pour s'en convaincre, désignons, comme d'habitude, par $\mathfrak{z}=(\mathfrak{z}^1, \mathfrak{z}^2, \dots)$ et $\mathfrak{y}=(\mathfrak{y}^1, \mathfrak{y}^2, \dots)$ des suites variables de nombres réels (c. à d. des points de l'espace E_ω de Fréchet). Soit $x \in S$. La condition $\mu(x)=\bar{t}$ équivaut à l'existence de deux suites $\mathfrak{z}=(\mathfrak{z}^1, \mathfrak{z}^2, \dots)$ et $\mathfrak{y}=(\mathfrak{y}^1, \mathfrak{y}^2, \dots)$ telles que: 1° la suite $\mathfrak{z}$ coïncide avec l'ensemble M_t et la suite $\mathfrak{y}$ avec l'ensemble P des entiers positifs, 2° l'inégalité $\mathfrak{z}^p<\mathfrak{z}^q$ équivaut à la condition $(\mathfrak{y}^p, \mathfrak{y}^q) \in C_x$, donc à l'égalité $x^{[\mathfrak{y}^p, \mathfrak{y}^q]}=2$.

[1]) Voir, par exemple, la démonstration réproduite dans ma *Topologie I*, p. 170.
[2]) Fund. Math. 29 p. 1 et 55.

En symboles logiques:

$$\{\mu(x)=\bar{t}\} \equiv \sum_{\mathfrak{z}\mathfrak{y}}\{\prod_n[(\mathfrak{y}^n \in P)\sum_k(r_k=\mathfrak{z}^n)\,(t^k=2)]\cdot$$
$$\cdot\prod_i\left([(t^i=2)\rightarrow\sum_j(r_i=\mathfrak{z}^j)]\sum_m(\mathfrak{y}^m=i)\right)\cdot$$
$$\cdot\prod_{pq}[(\mathfrak{z}^p<\mathfrak{z}^q)\equiv(x^{[\mathfrak{y}^p, \mathfrak{y}^q]}=2)]\}.$$

On constate aussitôt que l'ensemble des systèmes $(t, x, \mathfrak{z}, \mathfrak{y})$ satisfaisant à la condition entre crochets $\{\}$ est borelien (dans l'espace $C\times S\times E_\omega\times E_\omega$) [1]). Comme projection de celui-ci, l'ensemble $\underset{tx}{E}[\mu(x)=\bar{t}]$ est analytique.

Tous les énoncés du N° 1 sont donc applicables à la fonction $\mu(x)$. En particulier, l'ensemble des x tels que $\mu(x)<\Omega$ est un CA non borelien, puisque la fonction $\mu(x)$ admet comme valeurs tous les nombres ordinaux de la deuxième classe.

[1]) Cf. *Topologie I*, p. 258.