Supposons maintenant que l'ensemble $E-T$ ne soit pas partout de II-ième catégorie dans J. Il existerait alors $2^{\aleph_0}$ ensembles distincts, étant des F_σ, contenant $E-T$, contenus dans J et qui ne seraient pas partout de II-ième catégorie dans J. En vertu des définitions de la famille Θ et de la suite $\{Q_{2\xi+1}\}_{0\leqslant\xi<\varphi}$, il existerait donc un nombre ordinal λ tel que $\mu<\lambda<\varphi$ et $E-T\subset Q_{2\lambda+1}\subset J$. Or, on trouve comme plus haut, $p_{2\lambda+1}\,\epsilon\, E$, $p_{2\lambda+1}$ non $\epsilon\, T$ et $p_{2\lambda+1}$ non $\epsilon\, Q_{2\lambda+1}$, ce qui est incompatible avec $E-T\subset Q_{2\lambda+1}$. L'ensemble $E-T$ est donc partout de II-ième catégorie dans J.

La propriété de l'ensemble E que nous venons de démontrer nous permet de définir (par l'induction transfinie) une suite transfinie $\{N_\xi\}_{\xi<\omega_{\gamma+1}}$ d'ensembles de la famille Φ_0 (donc d'ensembles de puissance $2^{\aleph_0}$) de manière que pour tout ensemble T de puissance $<2^{\aleph_0}$ l'ensemble $N_\xi-T$ (pour $\xi<\omega_{\gamma+1}$) soit de mesure extérieure 1 et partout de II-ième catégorie dans J, en même temps que, pour $\alpha<\beta<\omega_{\gamma+1}$, les ensembles N_α et N_β soient presque disjoints. L'ensemble $N_\alpha N_\beta$ est donc de puissance $<2^{\aleph_0}$ et les ensembles $N_\alpha-N_\xi=$ $=N_\alpha-N_\alpha N_\beta$ et $N_\beta-N_\alpha=N_\beta-N_\alpha N_\beta$ sont de mesure extérieure 1 et partout de II-ième catégorie dans J (pour $\alpha<\beta<\omega_{\gamma+1}$). Les ensembles N_α, où $\alpha<\omega_{\gamma+1}$ forment donc une famille (de puissance $\aleph_{\gamma+1}>\aleph_\gamma=2^{\aleph_0}$) jouissant des propriétés $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{P}_1$ à la fois, c. q. f. d.

3. Il est à remarquer que l'on peut établir facilement (sans utiliser l'hypothèse du continu) l'existence d'une famille S de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$ de sous-ensembles distincts de l'intervalle J et jouissant de la propriété $\boldsymbol{P}_1$ (mais pas nécessairement presque disjoints deux à deux).

En effet, soit F la famille de puissance $2^{\aleph_0}$ d'ensembles disjoints, définie p. 112 de ma note précitée. Il existe, comme on démontre sans peine, une famille U de puissance $2^{\overline{\overline{F}}}=2^{2^{\aleph_0}}$ de sous-familles de F, telle que si $Z_1\,\epsilon\, U$, $Z_2\,\epsilon\, U$ et $Z_1\neq Z_2$, on a $Z_1-Z_2\neq 0$ [1]). Soit S la famille de tous les ensembles $S(Z)=\sum_{E\epsilon Z}E$, où $Z\,\epsilon\, U$. On a évidemment $\overline{\overline{S}}=\overline{\overline{U}}=2^{2^{\aleph_0}}$. Pour $Z_1\epsilon U$, $Z_2\epsilon U$, $Z_1\neq Z_2$, on a (vu la définition de la famille U) $Z_1-Z_2\neq 0$ et comme $Z_1\subset F$, il existe un ensemble M de la famille F, tel que $M\,\epsilon\, Z_1$ et M non $\epsilon\, Z_2$, d'où $M\subset S(Z_1)-S(Z_2)$. Chaque ensemble de la famille F étant de mesure extérieure 1 et partout de II-ième catégorie dans J, il en résulte le même pour l'ensemble $S(Z_1)-S(Z_2)$. La famille S jouit donc des propriétés désirées.

[1]) Cf. C. Kuratowski *Fund. Math.* 8, p. 205, note [1]) et A. Tarski *Fund. Math.* 16, p. 230—231.

Sur deux propositions, dont l'ensemble équivaut à l'hypothèse du continu.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Il existe, comme on sait, plusieurs conséquences de l'hypothèse du continu $\boldsymbol{H}$ ($2^{\aleph_0}=\aleph_1$), dont on ne sait pas si elles sont ou non équivalentes à cette hypothèse [1]). Il existe cependant des paires de telles conséquences, dont l'ensemble équivaut à l'hypothèse du continu [2]).

Le but de cette Note est de démontrer que *l'hypothèse du continu équivaut à l'ensemble de deux propositions suivantes*:

$\boldsymbol{P}_1$. *De deux ensembles linéaires de puissances inégales, celui dont la puissance est supérieure a toujours le type de dimension (au sens de M. Fréchet) plus grand.*

$\boldsymbol{P}_2$. *Il existe un ensemble linéaire L de puissance du continu qui admet un ensemble au plus dénombrable de points communs avec chaque ensemble (linéaire) parfait non-dense.*

Démonstration. 1° $\boldsymbol{H}\to\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$. L'implication $\boldsymbol{H}\to\boldsymbol{P}_2$ a été démontrée en 1914 par M. N. Lusin [3]). L'implication $\boldsymbol{H}\to\boldsymbol{P}_1$ résulte tout de suite des faits suivants: tout ensemble linéaire indénombrable contient un sous-ensemble dénombrable dense en soi; tout ensemble linéaire au plus dénombrable est contenu dans un ensemble linéaire dense en soi; deux ensembles dénombrables denses en soi sont toujours homéomorphes.

[1]) Voir mon livre *Hypothèse du continu* (Monografje Matematyczne t. IV, Warszawa—Lwów 1934), où l'on trouvera 82 propositions de ce genre.

[2]) V. p. ex. les propositions P_9 et P_{9^a} de mon livre cité (pp. 29 et 31).

[3]) *C. R. Paris* 158, p. 1259; v. aussi *Fund. Math.* 6, p. 154—155 et mon livre cité, p. 36 (proposition C_1).

2^0 $P_1 P_2 \to H$. Supposons vraies les propositions P_1 et P_2. Comme on sait, on établit (sans utiliser l'hypothèse du continu) l'existence d'un ensemble linéaire K de puissance $\aleph_1$ qui est toujours de I-e catégorie [4]). Admettons maintenant que $\aleph_1 < 2^{\aleph_0}$. L étant un ensemble satisfaisant à la proposition P_2, on aurait donc $\overline{\overline{K}} < \overline{\overline{L}}$ et, d'après la proposition P_1, on aurait $\dim K < \dim L$, de sorte que l'ensemble K serait homéomorphe à un sous-ensemble L_1 de L. L'ensemble L_1 serait donc indénombrable (de puissance $\aleph_1$) et toujours de I-e catégorie, ce qui est impossible, l'ensemble L ne contenant aucun sous-ensemble indénombrable de I-e catégorie. L'inégalité $\aleph_1 < 2^{\aleph_0}$ est donc impossible et on a $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$.

Je vais prouver encore que l'hypothèse du continu équivaut à l'ensemble de deux propositions: à savoir de P_1 et

P_3. *Il existe un ensemble linéaire S de puissance du continu qui admet un ensemble au plus dénombrable de points communs avec tout ensemble de mesure nulle.*

Démonstration. 1^0 $H \to P_1 P_3$. L'implication $H \to P_1$ a été démontrée plus haut. L'implication $H \to P_3$ a été démontrée par moi ailleurs [5]).

2^0 $P_1 P_3 \to H$. Comme j'ai démontré ailleurs (sans utiliser l'hypothèse du continu), il existe un ensemble linéaire N de puissance $\aleph_1$, tel que tout ensemble linéaire homéomorphe à N est de mesure nulle [6]).

Supposons maintenant vraies les propositions P_1 et P_3 et admettons que $\aleph_1 < 2^{\aleph_0}$. S étant un ensemble vérifiant la proposition P_3, on aurait donc $\overline{\overline{N}} < \overline{\overline{S}}$, d'où selon P_1, $\dim N < \dim S$, et l'ensemble N serait homéomorphe à un sous-ensemble S_1 de S. L'ensemble S_1, en tant que homéomorphe à N, serait donc de puissance $\aleph_1$ et de mesure nulle, ce qui est impossible, en vertu de $S_1 \subset S$ et de la propriété de l'ensemble S. On a donc $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$.

Il résulte tout de suite de $H \rightleftarrows P_1 P_2$ et $H \rightleftarrows P_1 P_3$ que *si la proposition P_1 est vraie, chacune des propositions P_2 et P_3 est équivalente à l'hypothèse du continu.*

---

[4]) Voir N. Lusin *Fund. Math.* **2**, p. 155; N. Lusin et W. Sierpiński, *Rend. Accad. Lincei* vol. VII, ser. 6 (1928), p. 214—215; W. Sierpiński *C. R. Soc. Sc. Varsovie* XXV, p. 104.

[5]) *Fund. Math.* **5**, p. 184; cf. mon livre cité, p. 31 (Proposition (S)).

[6]) *Fund. Math.* **7**, p. 188 et *Publ. math. Univ. Belgrade* t. II, p. 19.

Or, dans l'état actuel de la science, on regarde comme un problème extrêmement difficile celui de démontrer que la proposition P_2 (ou P_3) équivaut à l'hypothèse du continu. Cela indique le degré de difficulté qu'il y a à démontrer la proposition P_1 (sans faire appel à l'hypothèse du continu).

Quant à *la proposition P_1*, il est encore à remarquer qu'elle *devient fausse quand on y remplace le mot „linéaires" par „métriques"*.

En effet, soit M un ensemble linéaire dénombrable non isolé et soit N un espace métrique isolé de puissance $\aleph_1$ (p. ex. tel que toutes les distances entre deux points distincts y sont $=1$). On a évidemment $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{N}}$, mais on n'a pas $\dim M < \dim N$, l'ensemble M (en tant que non isolé) ne pouvant pas être homéomorphe à un sous-ensemble de N.

Cependant on peut démontrer que, *si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, la proposition P_1 reste vraie quand on y remplace le mot „linéaires" par „métriques séparables"*.