Sur une décomposition du segment.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Dans le vol. 28 de Fundam. Math. (p. 111—114), j'ai démontré à l'aide du théorème de M. Zermelo, mais sans faire l'usage de l'hypothèse du continu, qu'*il existe une famille* Ψ *de puissance* $>2^{\aleph_0}$ *d'ensembles contenus dans l'intervalle* $J=[0\leqslant x\leqslant 1]$ *et jouissant de la propriété* $\boldsymbol{P}$ *suivante*:

$\boldsymbol{P}$. *Les ensembles de la famille* Ψ *sont deux à deux presque disjoints, de mesure extérieure* 1 *et partout de II-ième catégorie dans* J.

Le but de cette Note est d'établir (également sans faire l'usage de l'hypothèse du continu) l'existence d'une famille Ψ de puissance $>2^{\aleph_0}$ d'ensembles contenus dans J, jouissant de la propriété $\boldsymbol{P}$ et encore de la propriété $\boldsymbol{P}_1$ suivante:

$\boldsymbol{P}_1$. *M et N étant deux ensembles distincts quelconques de la famille Ψ, l'ensemble $M-N$ est de mesure extérieure* 1 *et partout de II-ième catégorie dans* J.

Il est remarquer que *nous ne savons pas déduire la propriété* $\boldsymbol{P}_1$ *de la propriété* $\boldsymbol{P}$ *sans admettre l'hypothèse du continu*. En effet, admettons qu'il existe un ensemble linéaire E_0 de puissance $<2^{\aleph_0}$ qui soit contenu dans J, de mesure extérieure 1 et partout de II-ième catégorie dans J (ce que nous ne savons pas réduire à l'impossible sans admettre l'hypothèse du continu). Comme $\overline{\overline{E}}_0<2^{\aleph_0}$, l'ensemble $J-E_0$ contient, comme on voit sans peine, un sous-ensemble H_0 de puissance $2^{\aleph_0}$, de mesure nulle et de I-re catégorie. Comme j'ai démontré [1]), tout ensemble de puissance $2^{\aleph_0}$, donc en particulier l'ensemble H_0, contient une famille, soit Ψ_0, de puissance $>2^{\aleph_0}$ de sous-ensembles presque disjoints de puissance $2^{\aleph_0}$. Soit maintenant Ψ la famille de tous les ensembles de la forme E_0+E où $E\in\Psi_0$. On voit sans peine que la famille Ψ jouit de la propriété $\boldsymbol{P}$, mais ne jouit pas de la propriété $\boldsymbol{P}_1$ (puisque si $M\in\Psi$ et $N\in\Psi$, l'ensemble $M-N$ est de mesure nulle et de I-re catégorie).

[1]) *Fund. Math.* t. 28, p. 118.

Je donnerai ici deux démonstrations différentes de l'existence d'une telle famille Ψ. L'une sera indépendante de ma note citée, mais utilisera un théorème que j'ai démontré récemment sur les suites de nombres ordinaux finalement disjointes, l'autre consistera à indiquer comment on peut compléter ma démonstration citée de l'existence d'une famille Ψ jouissant de la propriété $\boldsymbol{P}$, pour prouver qu'elle jouit aussi de la propriété $\boldsymbol{P}_1$.

1. Soit φ le plus petit nombre ordinal de puissance du continu. Il existe, comme on sait, une suite transfinie du type φ

$$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_\omega, P_{\omega+1}, \ldots, P_\xi, \ldots \qquad (\xi<\varphi) \tag{1}$$

formée de tous les ensembles linéaires parfaits (non vides) situés dans l'intervalle $J=[0\leqslant x\leqslant 1]$.

Nous définirons par l'induction transfinie une suite transfinie du type φ d'ensembles

$$E_1, E_2, E_3, \ldots, E_\omega, E_{\omega+1}, \ldots, E_\xi, \ldots \qquad (\xi<\varphi) \tag{2}$$

comme il suit.

Soient: p_1^1 un élément de l'ensemble P_1 et E_1 l'ensemble formé de l'élément p_1^1 seul. Soit maintenant α un nombre ordinal quelconque, où $1<\alpha<\varphi$, et supposons tous les ensembles E_ξ, pour $\xi<\alpha$, définis de façon que $\overline{\overline{E}}_\xi\leqslant\overline{\xi}$ pour $\xi<\alpha$. On a donc $\overline{\overline{E}}_\xi\leqslant\overline{\alpha}$ pour $\xi<\alpha$ et, en posant $S_\alpha=\sum\limits_{\xi<\alpha}E_\xi$, on aura $\overline{\overline{S}}_\alpha\leqslant\overline{\alpha}^2$, donc $\overline{\overline{S}}_\alpha<2^{\aleph_0}$, puisque $\alpha<\varphi$. L'ensemble P_ξ, où $\xi<\alpha$, en tant que parfait, étant de puissance $2^{\aleph_0}$, on a $P_\xi-S_\alpha\neq 0$ et il existe un élément $p_\xi^\alpha\in P_\xi-S_\alpha$. Nous poserons

$$E_\alpha=\{p_\xi^\alpha\}_{\xi<\alpha}. \tag{3}$$

Les ensembles E_α $(\alpha<\varphi)$ étant ainsi définis par l'induction transfinie, on voit sans peine qu'ils sont disjoints deux à deux et que

$$\overline{\overline{E}}_\alpha\leqslant\overline{\alpha} \qquad \text{pour} \quad \alpha<\varphi. \tag{4}$$

Je dis que la suite (2) jouit de la propriété suivante: *toute somme de* $2^{\aleph_0}$ *ensembles distincts de la suite* (2) *est de mesure extérieure* 1 *et partout de II-ième catégorie dans* J.

En effet, soit S une somme de $2^{\aleph_0}$ ensembles distincts de la suite (2). Soit α un nombre ordinal quelconque $<\varphi$. Il résulte tout de suite de la définition de l'ensemble S et de celle du nombre φ qu'il existe un nombre ordinal μ, tel que $\alpha<\mu<\varphi$ et $E_\mu\subset S$. Or, vu que $\alpha<\mu$, on a $p^{\mu}_{\alpha} \epsilon P_{\alpha}$ et, d'après (3), $p^{\mu}_{\alpha} \epsilon E_{\mu}$, donc, d'après $E_{\mu} \subset S$, $p^{\mu}_{\alpha} \epsilon P_{\alpha} S$ et $P_{\alpha} S \neq 0$. L'ensemble S a donc au moins un point commun avec tout ensemble parfait contenu dans J. Il est par conséquent de mesure extérieure 1 et partout de II-ième catégorie dans J, c. q. f. d.

Il résulte d'un théorème que j'ai démontré dans le vol. 28 des Fundam. Math., p. 115, qu'il existe une famille Φ de puissance $>2^{\aleph_0}$, formée de suites transfinies du type φ de nombres ordinaux croissants $<\varphi$ finalement disjointes, c. à d. telles que $\{a_\xi\}_{\xi<\varphi}$ et $\{b_\xi\}_{\xi<\varphi}$ étant deux suites distinctes de la famille Φ, il existe toujours un nombre ordinal $\mu<\varphi$, tel que

(5) $$a_\xi \neq b_\eta \quad \text{pour} \quad \mu<\xi<\varphi \quad \text{et} \quad \mu<\eta<\varphi.$$

Soit Ψ la famille de tous les ensembles de la forme

$$\sum_{\alpha \epsilon \sigma} E_\alpha = \sum_{\xi<\varphi} E_{a_\xi},$$

où $\sigma=\{a_\xi\}_{\xi<\varphi}$ est une suite quelconque de la famille Φ.

Soient M et N deux ensembles distincts de la famille Ψ. Il existe donc deux suites distinctes $\sigma_1=\{a_\xi\}_{\xi<\varphi}$ et $\sigma_2=\{b_\xi\}_{\xi<\varphi}$ de la famille Φ, telles que

(6) $$M=\sum_{\alpha \epsilon \sigma_1} E_\alpha = \sum_{\xi<\varphi} E_{a_\xi} \qquad \text{et} \qquad N=\sum_{\alpha \epsilon \sigma_2} E_\alpha = \sum_{\xi<\varphi} E_{b_\xi}.$$

Les suites σ_1 et σ_2, en tant que distinctes et appartenant à la famille Φ, sont finalement disjointes. Il existe donc un nombre ordinal $\mu<\varphi$ pour lequel on a les inégalités (5).

Les ensembles de la suite (2) étant deux à deux disjoints, il résulte tout de suite de (6) et (5) que

(7) $$MN \subset \sum_{\xi\leqslant\mu} E_{a_\xi} + \sum_{\xi\leqslant\mu} E_{b_\xi}.$$

Or, la suite $\{a_\xi\}_{\xi<\varphi}$ étant croissante, on a $a_\xi \leqslant a_\mu$ pour $\xi\leqslant\mu$ et il résulte de (4) que $\overline{\overline{E}}_{a_\xi} \leqslant \bar{a}_\mu$ pour $\xi\leqslant\mu$; pareillement, $\overline{\overline{E}}_{b_\xi} \leqslant \bar{b}_\mu$ pour $\xi<\mu$. D'après (7) on a donc $\overline{\overline{MN}} \leqslant \bar{\mu}(\bar{a}_\mu+\bar{b}_\mu)$, d'où, vu que $\mu<\varphi$, $a_\mu<\varphi$ et $b_\mu<\varphi$,

(8) $$\overline{\overline{MN}} < 2^{\aleph_0}.$$

Les suites $\{a_\xi\}_{\xi<\varphi}$ et $\{b_\xi\}_{\xi<\varphi}$ étant croissantes, on a

$$a_\xi \geqslant \xi > b_\mu \geqslant \mu \qquad \text{pour} \quad \xi>b_\mu,$$

donc, si $\xi>b_\mu$,

$$a_\xi>b_\mu\geqslant b_\eta \qquad \text{pour} \quad \eta\leqslant\mu$$

et, d'après (5),

$$a_\xi \neq b_\eta \qquad \text{pour} \quad \mu<\eta<\varphi.$$

Par conséquent

$$a_\xi \neq b_\eta \qquad \text{pour} \quad \xi>b_\mu, \quad \eta<\varphi$$

et, les ensembles de la suite (2) étant deux à deux disjoints,

$$E_{a_\xi} E_{b_\eta}=0 \qquad \text{pour} \quad \xi>b_\mu \quad \text{et} \quad \eta<\varphi,$$

d'où selon (6):

$$E_{a_\xi}\cdot N=0 \qquad \text{pour} \quad \xi>b_\mu$$

et

$$M-N \supset \sum_{b_\mu<\xi<\varphi} E_{a_\xi}.$$

L'ensemble $M-N$ contient donc $2^{\aleph_0}$ ensembles distincts de la suite (2). Il est par conséquent de puissance $2^{\aleph_0}$, de mesure extérieure 1 et partout de II-ième catégorie dans J. Il en est de même de l'ensemble $N-M$.

Ainsi chacun des ensembles M et N est de puissance $2^{\aleph_0}$ et, d'après (8), ils sont presque disjoints.

La famille Ψ jouit donc des propriétés $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{P}_1$.

2. Conservons toutes les notations de ma démonstration des Fundam. Math. 28, p. 111—114, mentionnée au début. Je dis que l'ensemble E qui y est défini p. 113 (satisfaisant aux conditions du lemme) jouit de la propriété suivante: *quel que soit l'ensemble T de puissance $<2^{\aleph_0}$, l'ensemble $E-T$ est de mesure extérieure 1 et partout de II-ième catégorie dans J.*

Supposons, en effet, que $\overline{\overline{T}}<2^{\aleph_0}$ et que $m_e(E-T)<1$. Puisque $E-T\subset J$, il existe alors, comme on voit sans peine, $2^{\aleph_0}$ ensembles distincts, qui sont des G_δ de mesure <1, contenus dans J et contenant $E-T$. Or, d'après la formule (3) de la p. 113, l. c., on a $p_\alpha \epsilon E_\alpha$ pour $\alpha<\varphi$, donc, les ensembles E_α $(\alpha<\varphi)$ étant deux à deux disjoints, tous les éléments p_α $(\alpha<\varphi)$ sont distincts. D'après $\overline{\overline{T}}<2^{\aleph_0}$, il existe donc un nombre ordinal $\mu<\varphi$ tel que $p_\xi \, \text{non} \, \epsilon \, T$ pour $\mu<\xi<\varphi$. Il résulte des définitions de la famille T et de la suite $\{Q_{2\xi}\}_{\xi<\varphi}$ qu'il existe un nombre ordinal λ tel que $\mu<\lambda<\varphi$ et $E-T\subset Q_{2\lambda}\subset J$. Or, on a $p_{2\lambda}\epsilon E$ et (comme $2\lambda\geqslant\lambda>\mu$), $p_{2\lambda} \, \text{non} \, \epsilon \, T$, tandis que d'après (3) $p_{2\lambda} \, \text{non} \, \epsilon \, Q_{2\lambda}$, ce qui est incompatible avec $E-T\subset Q_{2\lambda}$. Ainsi $m_e(E-T)=1$.

Supposons maintenant que l'ensemble $E-T$ ne soit pas partout de II-ième catégorie dans J. Il existerait alors $2^{\aleph_0}$ ensembles distincts, étant des F_σ, contenant $E-T$, contenus dans J et qui ne seraient pas partout de II-ième catégorie dans J. En vertu des définitions de la famille Θ et de la suite $\{Q_{2\xi+1}\}_{0\leqslant\xi<\varphi}$, il existerait donc un nombre ordinal λ tel que $\mu<\lambda<\varphi$ et $E-T\subset Q_{2\lambda+1}\subset J$. Or, on trouve comme plus haut, $p_{2\lambda+1}\,\epsilon\, E$, $p_{2\lambda+1}$ non $\epsilon\, T$ et $p_{2\lambda+1}$ non $\epsilon\, Q_{2\lambda+1}$, ce qui est incompatible avec $E-T\subset Q_{2\lambda+1}$. L'ensemble $E-T$ est donc partout de II-ième catégorie dans J.

La propriété de l'ensemble E que nous venons de démontrer nous permet de définir (par l'induction transfinie) une suite transfinie $\{N_\xi\}_{\xi<\omega_{\gamma+1}}$ d'ensembles de la famille Φ_0 (donc d'ensembles de puissance $2^{\aleph_0}$) de manière que pour tout ensemble T de puissance $<2^{\aleph_0}$ l'ensemble $N_\xi-T$ (pour $\xi<\omega_{\gamma+1}$) soit de mesure extérieure 1 et partout de II-ième catégorie dans J, en même temps que, pour $\alpha<\beta<\omega_{\gamma+1}$, les ensembles N_α et N_β soient presque disjoints. L'ensemble $N_\alpha N_\beta$ est donc de puissance $<2^{\aleph_0}$ et les ensembles $N_\alpha-N_\xi=$ $=N_\alpha-N_\alpha N_\beta$ et $N_\beta-N_\alpha=N_\beta-N_\alpha N_\beta$ sont de mesure extérieure 1 et partout de II-ième catégorie dans J (pour $\alpha<\beta<\omega_{\gamma+1}$). Les ensembles N_α, où $\alpha<\omega_{\gamma+1}$ forment donc une famille (de puissance $\aleph_{\gamma+1}>\aleph_\gamma=2^{\aleph_0}$) jouissant des propriétés $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{P}_1$ à la fois, c. q. f. d.

3. Il est à remarquer que l'on peut établir facilement (sans utiliser l'hypothèse du continu) l'existence d'une famille S de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$ de sous-ensembles distincts de l'intervalle J et jouissant de la propriété $\boldsymbol{P}_1$ (mais pas nécessairement presque disjoints deux à deux).

En effet, soit F la famille de puissance $2^{\aleph_0}$ d'ensembles disjoints, définie p. 112 de ma note précitée. Il existe, comme on démontre sans peine, une famille U de puissance $2^{\overline{\overline{F}}}=2^{2^{\aleph_0}}$ de sous-familles de F, telle que si $Z_1\,\epsilon\, U$, $Z_2\,\epsilon\, U$ et $Z_1\neq Z_2$, on a $Z_1-Z_2\neq 0$ [1]). Soit S la famille de tous les ensembles $S(Z)=\sum_{E\epsilon Z}E$, où $Z\,\epsilon\, U$. On a évidemment $\overline{\overline{S}}=\overline{\overline{U}}=2^{2^{\aleph_0}}$. Pour $Z_1\epsilon U$, $Z_2\epsilon U$, $Z_1\neq Z_2$, on a (vu la définition de la famille U) $Z_1-Z_2\neq 0$ et comme $Z_1\subset F$, il existe un ensemble M de la famille F, tel que $M\,\epsilon\, Z_1$ et M non $\epsilon\, Z_2$, d'où $M\subset S(Z_1)-S(Z_2)$. Chaque ensemble de la famille F étant de mesure extérieure 1 et partout de II-ième catégorie dans J, il en résulte le même pour l'ensemble $S(Z_1)-S(Z_2)$. La famille S jouit donc des propriétés désirées.

[1]) Cf. C. Kuratowski *Fund. Math.* 8, p. 205, note [1]) et A. Tarski *Fund. Math.* 16, p. 230—231.

Sur deux propositions, dont l'ensemble équivaut à l'hypothèse du continu.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Il existe, comme on sait, plusieurs conséquences de l'hypothèse du continu $\boldsymbol{H}$ ($2^{\aleph_0}=\aleph_1$), dont on ne sait pas si elles sont ou non équivalentes à cette hypothèse [1]). Il existe cependant des paires de telles conséquences, dont l'ensemble équivaut à l'hypothèse du continu [2]).

Le but de cette Note est de démontrer que *l'hypothèse du continu équivaut à l'ensemble de deux propositions suivantes*:

$\boldsymbol{P}_1$. *De deux ensembles linéaires de puissances inégales, celui dont la puissance est supérieure a toujours le type de dimension (au sens de M. Fréchet) plus grand.*

$\boldsymbol{P}_2$. *Il existe un ensemble linéaire L de puissance du continu qui admet un ensemble au plus dénombrable de points communs avec chaque ensemble (linéaire) parfait non-dense.*

Démonstration. 1° $\boldsymbol{H}\to\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$. L'implication $\boldsymbol{H}\to\boldsymbol{P}_2$ a été démontrée en 1914 par M. N. Lusin [3]). L'implication $\boldsymbol{H}\to\boldsymbol{P}_1$ résulte tout de suite des faits suivants: tout ensemble linéaire indénombrable contient un sous-ensemble dénombrable dense en soi; tout ensemble linéaire au plus dénombrable est contenu dans un ensemble linéaire dense en soi; deux ensembles dénombrables denses en soi sont toujours homéomorphes.

[1]) Voir mon livre *Hypothèse du continu* (Monografje Matematyczne t. IV, Warszawa—Lwów 1934), où l'on trouvera 82 propositions de ce genre.

[2]) V. p. ex. les propositions P_9 et P_{9^a} de mon livre cité (pp. 29 et 31).

[3]) *C. R. Paris* 158, p. 1259; v. aussi *Fund. Math.* 6, p. 154—155 et mon livre cité, p. 36 (proposition C_1).