Le problème intégral de la localisation des ensembles ponctuels plans bornés à paratingent incomplet.

Par

Shao-Lien Chow (Tsing-Tao)[1]).

1. Le présent travail établit la solution complète d'un problème dont j'ai déjà donné une solution partielle dans ma Thèse de Doctorat[2]).

En 1935, préoccupé déjà par l'aspect intégral d'une question, résoluble au point de vue local d'une manière immédiate par le lemme d'univocité de M. G. Bouligand[3]), j'avais prouvé[4]) qu'un ensemble plan E, borné, fermé, punctiforme, à paratingent (en abrégé: ptg) partout incomplet est toujours situé sur un arc simple rectifiable.

L'hypothèse de E fermé joue ici un rôle fondamental. C'est ce que je vais d'abord justifier, en rappelant brièvement un exemple singulier que j'ai donné dans ma Thèse.

2. *Un exemple singulier.* Je vais montrer que chaque ensemble plan à ptg incomplet n'est pas toujours porté par une seule orthocourbe plane (c. à d. un arc à ptg partout incomplet, donc rectifiable). Par exemple: soit un ensemble plan, punctiforme, situé sur trois cycles convexes disjoints et dense sur chaque arc de ces contours; le ptg de l'ensemble en chaque point est incomplet, mais on ne peut le situer sur un seul arc sans point multiple.

3. On voit d'après cela le rôle essentiel que pourraient jouer certains cycles au point de vue de la localisation, quand l'ensemble punctiforme n'est pas fermé.

M. Bouligand m'a engagé à rechercher comment peut s'effectuer la localisation d'un ensemble ponctuel plan et borné, lorsque le ptg de sa fermeture est incomplet en chaque point de cette dernière, en me faisant observer que les cycles mis en cause devaient être en nombre fini.

Dans le présent travail, ayant justifié cette remarque, je résous complètement le problème intégral de localisation d'un ensemble de la catégorie indiquée à la faveur d'un prolongement convenable du lemme d'univocité (cf. **16**).

4. Nous dirons qu'un ensemble quelconque (fermé ou non) est *partout mal enchaîné*, s'il ne contient aucun sous-ensemble bien enchaîné. On conclut immédiatement que si un ensemble situé sur un arc est partout mal enchaîné, cet ensemble est non-dense relativement à cet arc, c. à d. que sur toute partie de cet arc on peut en trouver un autre ne contenant à son intérieur aucun point de l'ensemble. Les ensembles fermés sont de deux sortes:

1⁰ ensemble fermé partout mal enchaîné; ces ensembles, ne contenant évidemment aucun continu, sont punctiformes (première sorte).

2⁰ ensemble fermé non partout mal enchaîné; ceux-ci contiennent donc des continus (deuxième sorte).

I.

5. Envisageons d'abord les ensembles de la première sorte; nous allons démontrer qu'un ensemble plan, borné, fermé, punctiforme à ptg partout incomplet peut toujours être localisé sur une orthocourbe. Pour justifier cet énoncé, nous aurons besoin de quelques propositions préliminaires. En vertu du lemme d'univocité et la semi-continuité supérieure du ptg[5]), on peut justifier immédiatement la proposition suivante:

Lemme I. *Un ensemble ponctuel dont le ptg en un point M est incomplet est situé au voisinage de M sur un arc à ptg laissant échapper en chaque point une direction fixe d, et cet arc n'a qu'un point sur chaque parallèle à la droite exclue du ptg de l'ensemble en M.*

---

[1]) Research fellow of China Foundation for the Promotion of Education and Culture.

[2]) S. L. Chow, *Problèmes de raréfaction et de localisation des ensembles* (Thèse de Doctorat ès Sciences, Poitiers 1936), ou bien *Questions de Géométrie des ensembles*, Paris, Vuibert 1936.

[3]) G. Bouligand, *Introduction à la Géométrie Infinitésimale Directe* (en abrégé G. I. D.), Paris, Vuibert 1932, p. 76.

[4]) S. L. Chow, *Sur certains ensembles plans punctiformes*, Bull. de la Société des Sciences de Liège 1935, nº 2, p. 57—61.

[5]) G. Bouligand, G. I. D., p. 76.

6. Nous allons démontrer ici la proposition suivante par la construction C.M. [6]):

Lemme II. Soit E un ensemble plan, fermé, punctiforme. Etant donné un point M de E, on peut toujours construire un cycle simple de longueur bornée, entourant M, ne portant aucun point de E et dont tout point est à une distance de M inférieure à un nombre donné η.

Décrivons un cercle de centre M et de rayon inférieur à η. Soit F la réunion de la circonférence du cercle et du sous-ensemble de E constitué par tous les points de E non-situés à l'intérieur du cercle. Soit N un point quelconque de F. Considérons toutes les chaînes (M,N) dont les sommets sont des points de $E+F$ et désignons par $2d$ le défaut d'enchaînement entre M et N. Envisageons tous les $2d$ possibles entre M et les points de F; tous ces défauts d'enchaînement sont positifs et admettent une limite inférieure non nulle, sans quoi il existerait un continu entre M et le cercle. Soit 2δ une telle limite inférieure.

Effectuons la construction C.M. sur la réunion $E+F$ avec un rayon égal à δ; on obtient ainsi un ensemble ouvert $(E+F)_\delta$ qui présente au moins deux constituants [7]): l'un contient la circonférence et l'autre inclut M; ce dernier est totalement intérieur au cercle. Soit C_M ce constituant. La frontière extérieure de C_M est évidemment à une distance positive de E; c'est toujours une courbe fermée, mais qui peut avoir des points multiples. Or, que cette courbe fermée soit constituée d'un ou plusieurs cycles simples, l'un de ces cycles, au moins, entoure le point M. En vertu d'un resultat de M. Bouligand [8]), ce cycle simple a une longueur bornée. Notre énoncé est donc démontré.

7. Du résultat local précédent, nous allons maintenant passer à des considérations de nature intégrale. Reprenons notre ensemble E et soit M_1 un de ses points. Le voisinage de M_1 sur E appartient à un arc à ptg partout incomplet (lemme I) et M_1 peut être entouré d'un cycle simple rectifiable C_{M_1} (lemme II) incluant un certain sous-ensemble E_1 de E et ne portant aucun point de E. Il est évident

[6]) G. Bouligand, G. I. D., Chap. XIII.

[7]) G. Bouligand, G. I. D., p. 34—35.

[8]) G. Bouligand, *Ensembles impropres et nombre dimensionnel,* Bull. des Sc. Math. 2-me série, t. LII, septembre et octobre 1928 et juin 1929.

que $E-E_1=F$ est à une distance positive de C_{M_1}. Choisissons dans F un second point M_2 de E. Comme nous l'avons fait pour M_1, on peut attacher à M_2 un sous-ensemble E_2 de E situé dans un cycle simple rectifiable C_{M_2}; ainsi de suite. On voit qu'on peut ainsi décomposer E en une famille au plus dénombrable de sous-ensembles à distances mutuelles positives, entourés chacun par un cycle simple rectifiable de diamètre arbitrairement petit et ne portant aucun point de E.

Considérons la réunion d'un de nos cycles et du domaine borné dont il est la frontière; nous avons ainsi un ensemble fermé que nous appellerons *cellule.* Notre ensemble E est donc recouvrable par une famille au plus dénombrable de cellules, dont le diamètre est arbitrairement petit. A cette famille on peut toujours substituer une famille finie jouissant de la même propriété (lemme de Borel--Lebesgue), d'où cet énoncé:

Lemme III. Soit E un ensemble plan, borné, fermé, punctiforme, à ptg partout incomplet. On peut enfermer E dans un nombre fini de cellules disjointes, de diamètre inférieur à une longueur donnée et dont les frontières sont des cycles simples rectifiables ne portant aucun point de E.

8. D'après le lemme I, le sous ensemble E_i de E, dans chaque cellule C_i, est situé sur un arc c_i à ptg laissant échapper en chaque point une même direction d_i.

Par construction, toute droite parallèle à d_i ne rencontre $c_i=\widehat{A_iA'_i}$ (les deux points A_i et A'_i étant étrangers à E_i), à l'intérieur de C_i, qu'en un seul point et tous le points de $\widehat{A_iA'_i}$ sont compris entre les deux droites Δ_{A_i} et $\Delta_{A'_i}$ parallèles à d_i, menées par A_i et A'_i, Traçons deux segments $\overline{B_iA_i}$ et $\overline{A'_iB'_i}$ perpendiculaires à d_i et en dehors des deux parallèles Δ_{A_i} et $\Delta_{A'_i}$, segments situés entièrement dans C_i. La réunion $\overline{B_iA_i}+E_i+\overline{A'_iB'_i}$ est alors située, à l'intérieur de C_i, sur une orthocourbe c'_i (puisque son ptg est partout incomplet); cette orthocourbe c'_i peut être choisie de manière à englober $\overline{B_iA_i}+c_i+\overline{A'_iB'_i}$. Je dis qu'on peut toujours construire $n-1$ orthocourbes $b_1=\widehat{B'_1B_2}$, $b_2=\widehat{B'_2B_3}$, ... , $b=\widehat{B'B_n}$ telles que la réunion $c'_1+b_1+c'_2+b_2+...+c'_n$ forme une seule orthocourbe.

En effet, le complémentaire de $c_1+c_2+\widehat{A_2'B_2'}+c_3'+\ldots+c_n'$ est un domaine D_1 et les deux points B_1 et B_2' appartiennent à D_1. Il est facile de construire dans D_1 une ligne polygonale d'un nombre fini de sommets $\widehat{B_1'B_2}$ (voir G. I. D., p. 34), telle que la réunion $r_1=c_1'+\widehat{B_1'B_2}+c_2'$ forme une orthocourbe. Cet arc r_1 est disjoint de $c_3', c_4', \ldots, c_n'$, puisque $\widehat{B_1'B_2}$ est construit dans D_1. Le complémentaire de $c_1'+\widehat{B_1'B_2}+\overline{B_2A_2}+c_2+c_3+\overline{A_3'B_3'}+c_4'+\ldots+c_n'$ est aussi un domaine D_2 et les deux points B_2' et B_3 appartiennent à D_2. On peut donc construire dans D_2 un arc $\widehat{B_2'B_3}$ tel que la réunion $r_2=r_1+\widehat{B_2'B_3}+c_3'$ forme un arc à ptg partout incomplet, et ainsi de suite. On obtient cet énoncé:

Théorème 1. *Par un ensemble borné, plan, fermé, punctiforme et dont le ptg est partout incomplet, on peut faire passer une orthocourbe.*

9. A la suite naturelle de ce résultat, on peut démontrer, dans l'espace, les deux propositions suivantes [2]):

Théorème 2. *Un ensemble spatial, borné, fermé, punctiforme, à ptg partout incomplet peut toujours être situé sur une orthosurface.*

Théorème 3. *Par un ensemble spatial, borné, fermé, punctiforme, dont le ptg est partout privé d'un plan* (variable suivant le point considéré), *on peut faire passer une orthocourbe gauche.*

10. Nous allons étudier ici les ensembles de la seconde sorte à ptg partout incomplet. Remarquons qu'un continu à ptg partout incomplet est un arc simple ou un cycle simple et qu'un ensemble E_0 de la seconde sorte à ptg partout incomplet ne peut contenir comme sous-continus que des arcs A_n et des cycles simples C_m.

11. Rappelons la proposition suivante:

Soient: E_1 une courbe dont le ptg en un point M (distinct d'une extrémité) *est incomplet, E la réunion de E_1 et quelque autre ensemble E_2 formé de points étrangers à E_1 et dont M est point d'accumulation. Le paratingent de E en M est alors complet* [9]).

[9]) Voir dans ma Thèse, citée au renvoi [2]), la p. 16.

En vertu de cette proposition, on peut prouver immédiatement les propriétés suivantes:

(1) *Si les continus C_m et A_n sont au nombre infini, leur ensemble d'accumulation au sens de Janiszewski* [10]) *ne contient pas de continu qui ne se réduise à un point.*

(2) *Chaque cycle C_m est toujours à une distance positive de l'ensemble E_0-C_m.*

(3) *Deux quelconques des continus C_m et A_n ne peuvent se rencontrer.*

(4) *Aucun point de chaque arc A_n, distinct des extrémités, ne peut être point d'accumulation de points de E_0 non situés sur l'arc A_n.*

12. Nous allons démontrer que *si l'ensemble E_0 contient des cycles C_m, le nombre m de ces cycles est fini.*

Supposons au contraire que ce nombre soit infini et soit O un point de l'ensemble d'accumulation de cette infinité de cycles; on voit que deux cas se présentent:

1° ou bien dans un cercle de centre O et de rayon arbitrairement petit, il existe une infinité de cycles; dans ce cas le ptg de E en O est complet.

2° ou bien, cette éventualité est exclue. Dans ce cas, on trouverait une infinité d'arcs de nos cycles extérieurs au cercle, ces arcs auraient au moins un autre point d'accumulation Q distinct de O. On construirait deux cercles respectivement de centre O et de centre Q et on trouverait toujours qu'il y a une infinité de cycles rencontrant ces deux cercles simultanément. Appelons G cet ensemble de cycles. Par suite, O et Q sont pour cette suite deux points de son ensemble limite [11]). En vertu du théorème de Janiszewski [12]), son ensemble d'accumulation est un continu. L'ensemble d'accumulation des C_m contient évidemment ce continu, contrairement à **11** (1).

Ces cas étant donc à écarter, on voit que l'ensemble d'accumulation des cycles est vide, et par suite, que leur nombre est fini.

[10]) G. Bouligand, G. I. D., p. 155.
[11]) G. Bouligand, G. I. D., p. 157—158.
[12]) G. Bouligand, G. I. D., p. 159; ou bien Thèse de M. Rabaté, Toulouse 1931, Chap. VII.

13. Les résultats précédents nous montrent que l'ensemble E_0 peut toujours être partagé en deux sous-ensembles disjoints: à savoir, un ensemble formé d'un nombre fini de cycles C_m, chacun à ptg incomplet, et un ensemble E formé par la réunion des arcs A_m et d'un ensemble partout mal enchaîné e.

Démontrons encore la proposition suivante:

Par un sous-ensemble de E situé sur un cycle K, on peut toujours faire passer un arc simple.

En effet, par hypothèse, les arcs A_n ne sont pas des cycles; d'autre part, e est partout mal enchaîné, il est donc non-dense sur K. On peut donc trouver un arc, appartenant à K, ne contenant aucune partie des A_n, et, sur cet arc, on peut en trouver un autre ne contenant aucun point de e; on supprime cet arc du cycle K. Le reste du cycle est un autre arc portant le même sous-ensemble de E que K; notre énoncé est ainsi démontré.

14. Rappelons qu'en vertu du lemme d'univocité de M. Bouligand et de la semi-continuité supérieure d'inclusion[13]) du ptg, si M_1 est un point quelconque de E et $D_1'M_1D_1$ une droite exclue du ptg en M_1, on peut trouver

1⁰ deux angles opposés α_1 et α_1' de sommet M_1, contenant $D_1'M_1D_1$, de sorte que les directions intérieures à ces angles sont aussi exclues du ptg de E en M_1;

2⁰ un cercle C_1 assez petit de centre M_1, tel que le sous-ensemble de E intérieur à C_1 soit situé dans deux secteurs S_1' (antérieur) et S_1 (postérieur), complémentaires des α_1' et α_1.

3⁰ le sous-ensemble E_1 (ou E_1') de E dans chaque secteur S_1 (ou S_1'), situé sur un arc $\widehat{M_1P_1}$ (ou $\widehat{P_1'M_1}$) à ptg laissant échapper en chaque point une direction commune d_1 ($\| D_1'M_1D_1$), cet arc n'ayant qu'un point sur chaque parallèle à la droite exclue du ptg de E en M_1;

4⁰ la réunion $\widehat{P_1'M_1}+\widehat{M_1P_1}$ formant un arc à ptg partout incomplet.

[13]) G. Bouligand, *Essai sur l'unité des méthodes directes*, Mém. Soc. Roy. Sc. Liège, 3-me série, t. XIX, 1933, p. 68; Voir aussi G. I. D., n⁰ 77 ou bien ma Thése citée au renvoi [2]), p. 24.

15. *Difficulté d'employer sans précaution le lemme d'univocité pour localiser l'ensemble E sur un nombre fini d'orthocourbes.*

Pour le sous-ensemble E_1 dans le secteur S_1, deux cas se présentent:

1⁰ E_1 a des points situés sur la circonférence, dont l'un au moins est point de $\overline{E-E_1}$.

2⁰ cette éventualité est exclue.

Dans le second cas, aucun point de l'arc $\widehat{M_1P_1}$ ne peut être point de $\overline{E-E_1}$; E_1 est bien localisé dans le secteur S_1.

Dans le premier cas, soit p_1 le point commun à E_1 et à $\widehat{M_1P_1}$, qui soit situé sur la circonférence, que l'on rencontre le premier en parcourant l'arc $\widehat{M_1P_1}$ à partir de M_1, et enfin qui soit en même temps un point de $\overline{E-E_1}$. En vertu de la proposition mentionnée au début de **11**, on voit que le ptg de $\widehat{M_1P_1}+(E-E_1)$ en p_1 est complet (au moins, lorsque p_1 est distinct de P_1). En prenant au hasard un point M de E, extérieur à S_1 et tel que son cercle du lemme d'univocité contienne p_1, on aurait un arc $\widehat{Mp_1}$ portant un sous-ensemble de E et rencontrant $\widehat{M_1P_1}$ en un point p_1, d'où pour $p_1 \neq P_1$, la présence d'un point multiple.

Cette remarque nous montre la difficulté d'employer sans précaution le lemme d'univocité pour localiser E sur des orthocourbes. Il sera donc nécessaire, quand se présenteront deux régions de recouvrement ayant un point frontière commun (nous les dirons *contigües*), de prendre certaines dispositions particulières.

16. *Prolongement du lemme d'univocité assurant que les deux arcs situés dans deux régions contigües ou bien sont à une distance positive l'un de autre ou bien appartiennent à un même arc à ptg partout incomplet.*

Prenons un point M_2 commun à E_1 et à $\widehat{M_1p_1}$, très voisin de p_1, et menons $M_2\Delta_1 \| M_1D_1$. On peut dire immédiatement que le sous-ensemble E_1 de E, situé dans une des régions R_1 déterminées dans S_1 par $M_2\Delta_1$, est bien localisé sur l'arc $\widehat{M_1M_2}$. Or, la droite $M_2\Delta_1$ est exclue du ptg de E en M_2. En vertu de **14**, on peut toujours trouver:

1^0 deux angles α_2 et α'_2 de sommet M_2, contenant $M_2\Delta_1$, de sorte que les directions intérieures à ces angles soient aussi exclues du ptg de E en M_2;

2^0 un cercle C_2 assez petit de centre M_2 et tel que le sous-ensemble de E intérieur à C_2 soit situé dans deux secteurs S'_2 (antérieur) et S_2 (postérieur) complémentaires des α'_2 et α_2.

3^0 le sous-ensemble de E situé dans S'_2 et dans la région R_1, localisé sur $\widehat{M_1M_2}$, et le sous-ensemble E_2 dans S_2 et situé sur un arc $\widehat{M_2P_2}$ dont le ptg laisse échapper une direction commune d_2 (distincte ou non de d_1, mais contenue dans l'angle α_2), cet arc n'ayant qu'un point sur chaque parallèle à la droite exclue du ptg en M;

4^0 $\widehat{M_1M_2}+\widehat{M_2P_2}$ formant un arc à ptg partout incomplet.

Occupons-nous maintenant du sous-ensemble E_2 dans le secteur S_2. Si l'on est dans le cas **15**, 2^0, l'arc $\widehat{M_1M_2P_2}$ ne contient aucun point (sauf tout au plus M_1) qui soit point d'accumulation de points de E non situés sur cet arc. Si l'on est dans le cas **15**, 1^0, on recommencera les considérations précédentes, et ainsi de suite.

On répétera au sujet du secteur S'_1 les raisonnements que nous venons de faire sur le secteur S_1.

17. Vu le paragraphe précédent et vu que notre ensemble est borné, on peut toujours l'enfermer dans un nombre fini de régions, deux régions contigües n'ayant qu'un point de E en commun et les deux arcs qui portent les sous-ensembles de E situés dans ces deux régions se laissant toujours réunir de façon à former un même arc à ptg partout incomplet.

Comme conclusion, on peut toujours localiser l'ensemble, que nous avons debarrassé de ses cycles, sur un nombre fini de courbes à ptg partout incomplet. Mais en vertu de **13**, on peut toujours s'arranger pour que ces courbes soient des arcs proprement dits à ptg partout incomplet et non des cycles.

Nous trouverons donc, en revenant à l'ensemble initial E_0, qui peut contenir des cycles, la conclusion suivante:

Etant donné un ensemble plan fermé, borné, à ptg partout incomplet, on peut toujours localiser cet ensemble sur un nombre fini de cycles et d'arcs deux à deux disjoints. Chaque cycle et chaque arc sont à ptg partout incomplet.

18. Les arcs ci-dessus peuvent d'ailleurs toujours être réunis entre eux et constituer ainsi un seul arc à ptg partout incomplet (cf. **8**). Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante:

Un ensemble plan, borné, fermé, à ptg partout incomplet et ne contenant aucun cycle peut toujours être localisé sur un arc à ptg partout incomplet.