En effet, soit $x \in H$, $y \in H$ et $x \neq y$. Il existe donc deux nombres ordinaux distincts $\alpha < \varphi$ et $\beta < \psi$, tels que $x = p_\alpha$ et $y = p_\beta$. Supposons que $\beta > \alpha$. Si l'on avait xRy, il en découlerait d'après (1) que $p_\beta \in V(p_\alpha)$. Or, comme $\alpha < \beta$, on a $V(p_\alpha) \subset Q_\beta$ et, par suite, on aurait $p_\beta \in Q_\beta$, ce qui est impossible, puisque, par définition, $p_\beta \in E - (K + P_\beta + Q_\beta + T_\beta)$. Si l'on avait yRx, il en résulterait d'après (2) que $p_\beta \in Z(p_\alpha)$, donc, comme $Z(p_\alpha) \subset T_\beta$ (puisque $\alpha < \beta$), on aurait $p_\beta \in T_\beta$, ce qui est également en contradiction avec la définition de p_β. Les éléments x et y ne sauraient donc être liés par la relation R. Le raisonnement est tout à fait analogue si l'on suppose que $\beta < \alpha$.

Or, il résulte de la définition de la suite (7) que les éléments $p_\alpha (\alpha < \varphi)$ sont tous distincts et appartiennent à l'ensemble E: d'après $\overline{\varphi} = \mathfrak{m}$, on a par conséquent $\overline{\overline{H}} = \mathfrak{m}$ et $H \subset E$. L'ensemble H satisfait donc aux conditions du problème de M. Ruziewicz et notre théorème est démontré.

Il en résulte tout de suite ce

Corollaire. *La réponse au problème de M. Ruziewicz est affirmative pour* $\mathfrak{m} = \aleph_{\alpha+1}$, *où* α *est un nombre ordinal quelconque* [1]).

En ce qui concerne les autres nombres cardinaux, je démontrerai ailleurs [2]) que la réponse au problème de M. Ruziewicz est affirmative pour tout nombre cardinal infini $\mathfrak{m} < \aleph_\Omega$.

---

[1]) Il en résulte la solution du problème de M. Sierpiński, posé dans *Fund. Math.* t. 28, p. 73, renvoi [1]).

[2]) Voir *C. R. Soc. Sc. Varsovie* XXX (1937) (à paraître).

Sur la non-existence d'opération universelle pour les ensembles dénombrables.

Par

W. Sierpiński (Warszawa).

On dit qu'une *opération* (univoque) $\bigcirc$ dans l'ensemble E est définie, si l'on a fait correspondre à tout couple ordonné de deux éléments a, b de E (distincts ou non) un élément $c = a \bigcirc b$ de l'ensemble E (bien déterminé par le couple a, b); en d'autres termes — si l'on a défini une fonction de deux variables $f(a, b)$ pour $a \in E$, $b \in E$ et dont les valeurs appartiennent à l'ensemble E.

Deux opérations $\bigcirc$ et $\odot$, définies respectivement dans deux ensembles E_1 et E_2, sont dites *isomorphes*, s'il existe une correspondance biunivoque entre les éléments des ensembles E_1 et E_2, telle que les résultats des opérations $\bigcirc$ et $\odot$ effectuées respectivement sur des couples d'éléments correspondants de E_1 et de E_2 sont toujours des éléments correspondants; en d'autres termes — s'il existe une transformation biunivoque φ de E_1 en $E_2 = \varphi(E_1)$, telle que l'on ait

$$\varphi(a) \odot \varphi(b) = \varphi(a \bigcirc b) \qquad \text{pour} \quad a \in E_1,\ b \in E_1.$$

Je me propose de démontrer ici qu'*il n'existe pas d'opération* $\bigcirc$ *définie dans un ensemble dénombrable* E *qui soit* ***universelle***, *c. à d. telle qu'il y ait, pour chaque opération* $\odot$ *définie dans un ensemble dénombrable, un sous-ensemble dénombrable* H *de* E *dans lequel l'opération* $\bigcirc$ *soit isomorphe à l'opération* $\odot$.

Je vais démontrer notamment ce

Théorème. $\bigcirc$ *étant une opération définie dans l'ensemble dénombrable* E, *il existe toujours une opération* $\odot$ *définie dans l'ensemble* N *de tous les nombres naturels qui, pour aucun sous-ensemble dénombrable de* E, *n'est isomorphe à l'opération* $\bigcirc$ *considérée dans ce sous-ensemble.*

Démonstration. Soit $E=(a_1, a_2, a_3, ...)$. Posons pour tout $a \in E$:

$$(1) \qquad f_1(a)=a,$$

$$(2) \qquad f_{n+1}(a)=a \bigcirc f_n(a) \qquad \text{pour} \quad n=1, 2, 3, ...$$

La suite infinie des fonctions $f_1(a), f_2(a), f_3(a), ...$ est ainsi définie (pour $a \in E$) par l'induction.

L'opération $\odot$ dans l'ensemble $N=(1, 2, 3, ...)$ sera définie comme il suit.

Posons

$$(3) \qquad 1 \odot n=n+1 \qquad \text{pour} \quad n=1, 2, 3, ...,$$

et

$$(4) \qquad n \odot n=n \qquad \text{pour} \quad n=2, 3, 4, ...$$

Les nombres $2\odot(n+2)$ seront définis pour n naturels par les conditions:

$$(5) \qquad 2\odot(n+2)=n+1, \quad \text{si} \quad f_2(a_n) \bigcirc f_{n+2}(a_n)=f_{n+2}(a_n),$$

$$(6) \qquad 2\odot(n+2)=n+2, \quad \text{si} \quad f_2(a_n) \bigcirc f_{n+2}(a_n) \neq f_{n+2}(a_n).$$

Pour tous les autres couples ordonnés de deux nombres naturels k, l, soit $k \odot l=1$.

L'opération $\odot$ étant ainsi définie dans l'ensemble N, supposons qu'elle soit isomorphe à l'opération $\bigcirc$ considérée dans un sous-ensemble dénombrable E_1 de E.

1 étant le seul élément x de N pour lequel $x \odot x \neq x$, l'isomorphie admise entraîne l'existence d'un et un seul élément y de E_1, soit $y=a_p$, correspondant à x par cette isomorphie et pour lequel $y \bigcirc y \neq y$. Or, il en résulte par induction en vertu de (1)—(3), que par la même isomorphie l'élément $f_n(a_p)$ correspond (pour $n=1, 2, 3, ...$) au nombre n de N. Donc, l'élément $f_2(a_p) \bigcirc f_{p+2}(a_p)$ correspond au nombre $2\odot(p+2)$.

Or, d'après (5), si $f_2(a_p) \bigcirc f_{p+2}(a_p)=f_{p+2}(a_p)$, on a $2\odot(p+2)=p+1$ et, dans notre isomorphie, c'est le nombre $p+1 \neq p+2$ qui correspondrait à l'élément $f_{p+2}(a_p)$ de E_1, contrairement à ce qui vient d'être démontré. D'autre part, d'après (6), si $f_2(a_p) \bigcirc f_{p+2}(a_p) \neq f_{p+2}(a_p)$, on a $2\odot(p+2)=p+2$, d'où, par isomorphie, $f_2(a_p) \bigcirc f_{p+2}(a_p)=f_{p+2}(a_p)$, ce qui implique une contradiction.

L'hypothèse d'isomorphie entre l'opération $\odot$ définie dans N et l'opération $\bigcirc$ considérée dans le sous-ensemble dénombrable E_1 de E comportant ainsi une contradiction, l'opération $\odot$ jouit bien de la propriété affirmée. Le théorème se trouve ainsi démontré.

Il est intéressant de confronter ce théorème avec un autre, que j'ai démontré ailleurs [1]), et d'après lequel il existe une *suite double universelle* de nombres naturels, c. à d. une suite double S telle que chaque suite double de nombres naturels soit une suite partielle de S.

Il est aussi à remarquer que, d'après MM. Mazur et Ulam, il existe un *groupe abélien dénombrable universel* [2]).

---

1) *Bull. Inst. Math. Univ. Tomsk* 1936; cf. *Fund. Math.* 27, p. 8.

2) Voir *Annales Soc. Polonaise Math.* IX. p. 204.