Remarques sur les ensembles plans fermés.

Par

Edward Szpilrajn (Warszawa).

1. Notations. L'intervalle $0 \leqslant x \leqslant 1$ sera designé par I; le carré $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ par I^2; l'espace des sous-ensembles fermés de I (métrisé par la formule connue de M. F. Hausdorff) par 2^{I} [1]).

E étant un sous-ensemble de I^2, le symbole $\mathrm{D}(E,\xi)$ désignera l'intersection de E avec la droite $x=\xi$; en formule:

$$\mathrm{D}(E,\xi) = \underset{y}{\mathrm{E}}\,[(\xi,y)\,\epsilon\, E].$$

Enfin, $\mathbf{D}(E)$ désignera la famille de tous les ensembles $\mathrm{D}(E,\xi)$ non vides.

2. Problème et résultats. La Note présente est consacrée au problème de *la caractérisation des familles* $\mathbf{D}(F)$ *pour les sous-ensembles fermés* F *de* I^2. Les propositions suivantes seront établies:

I. F étant un sous-ensemble fermé de I^2, la famille $\mathbf{D}(F)$ constitue un sous-ensemble analytique de 2^{I}.

II. A étant un sous-ensemble analytique de 2^{I}, il existe un ensemble fermé $F \subset \mathrm{I}^2$ et une famille au plus dénombrable $\boldsymbol{B} \subset 2^{\mathrm{I}}$ tels que $\mathbf{D}(F) = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$.

III. Il existe une famille $\boldsymbol{H} \subset 2^{\mathrm{I}}$ qui est une G_δ et pour laquelle on a $\mathbf{D}(F) \neq \boldsymbol{H} + \boldsymbol{S}$, quels que soient l'ensemble fermé $F \subset \mathrm{I}^2$ et la famille $\boldsymbol{S} \subset 2^{\mathrm{I}}$ finie (ou vide).

[1]) Cf. p. ex. C. Kuratowski, *Topologie I*, Monografie Matematyczne, Warszawa-Lwów 1933, p. 89.

IV. $\boldsymbol{F}$ étant un sous-ensemble fermé de 2^{I}, il existe un ensemble fermé $F \subset \mathrm{I}^2$ tel que $\boldsymbol{F} = \mathbf{D}(F)$; $\boldsymbol{K}$ étant un F_σ dans 2^{I}, il existe un ensemble fermé $K \subset \mathrm{I}^2$ tel que $\boldsymbol{K} = \mathbf{D}(K) + (\mathrm{I})$.

V. Il existe une famille dénombrable $\boldsymbol{P} \subset 2^{\mathrm{I}}$ et une famille $\boldsymbol{G}$ qui est un ensemble ouvert dans 2^{I} et pour lesquelles on a $\boldsymbol{P} \neq \mathbf{D}(F) \neq \boldsymbol{G}$, quel que soit l'ensemble fermé $F \subset \mathrm{I}^2$.

Il est intéressant de confronter les propositions *I—III* avec les propriétés de la notion de semi-continuité.

Pour qu'un ensemble $F \subset \mathrm{I}^2$ soit fermé, il faut et il suffit que la fonction $\mathrm{D}(F,\xi)$ soit semi-continue au sens de M. Kuratowski (définie sur un ensemble fermé $E \subset \mathrm{I}$) [1]). Par conséquent, on peut considérer (en particulier dans les propositions *I—V*) les ensembles des valeurs des fonctions semi-continues au sens de M. Kuratowski (définies sur les sous-ensembles fermés de I et admettant comme valeurs les éléments de 2^{I}) au lieu des familles $\mathbf{D}(F)$ (définies pour des ensembles fermés $F \subset \mathrm{I}^2$).

Considérons maintenant les fonctions semi-continues supérieurement (au sens ordinaire), définies sur I et dont les valeurs appartiennent à I. Il résulte facilement d'un théorème de M. Sierpiński [2]) que pour qu'un ensemble $E \subset \mathrm{I}$ soit celui des valeurs d'une telle fonction, il faut et il suffit que E soit un ensemble analytique contenant sa borne supérieure. La borne supérieure de E joue dans cette proposition un rôle analogue à celui de la famille $\boldsymbol{B}$ dans la proposition *II*. Le fait qu'*un* point est remplacé par une famille *dénombrable* semble assez naturel, l'ensemble I étant de dimension 1 et l'espace 2^{I} de dimension infinie. Le problème d'une caractérisation précise de la famille $\boldsymbol{B}$ reste ouvert.

3. Démonstrations. *I.* La famille $\mathbf{D}(F)$ coïncide avec l'ensemble des valeurs de la fonction $\mathrm{D}(F,x)$ définie sur la projection de F sur l'axe des abscisses. Cette fonction étant semi-continue au sens de M. Kuratowski et par conséquent de I-e classe [3]), l'ensemble $\mathbf{D}(F)$ est un ensemble analytique dans 2^{I}.

[1]) C. Kuratowski, *Les fonctions semi-continues dans l'espace des ensembles fermés*, Fund. Math. 18 (1932), pp. 148-159.

[2]) Pour qu'un ensemble linéaire E soit l'ensemble des valeurs d'une fonction semi-continue supérieurement (définie sur toute la droite), il faut et il suffit que E soit un ensemble analytique. Cf. W. Sierpiński, *Les ensembles analytiques et les fonctions semi-continues*, Bulletin de l'Acad. Polonaise, Cl. des Sc. Math. et Nat. (A) 1927, pp. 697-701.

[3]) C. Kuratowski, l. c., Fund. Math. 18, p. 152.

II. Désignons par N l'ensemble des nombres irrationnels appartenant à I. $\boldsymbol{A}$ étant un ensemble analytique dans 2^{I}, il existe une fonction continue $F(\xi)$ définie sur N et telle que $F(\mathrm{N})=\boldsymbol{A}$.

Soit E l'ensemble des points (x,y) tels que $x \epsilon \mathrm{N}$ et $y \epsilon F(x)$. Posons $F=\bar{E}$. L'ensemble E étant fermé dans $\mathrm{N}\times\mathrm{I}$, on a $\mathrm{D}(F,x)=$ $=\mathrm{D}(E,x)=F(x)$ pour chaque $x \epsilon \mathrm{N}$. En désignant par $\boldsymbol{B}$ la famille dénombrable des ensembles $\mathrm{D}(F,x)$ pour $x \subset \mathrm{I}-\mathrm{N}$, il vient $\mathbf{D}(F)=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

III. Soit $\boldsymbol{H}$ la famille des ensembles dont chacun est composé d'un seul point de N; c'est donc un G_δ (dans 2^{I}). Nous allons démontrer que la famille $\boldsymbol{H}$ satisfait aux conditions énoncées.

Supposons par contre qu'il existe une famille finie $\boldsymbol{S}\subset 2^{\mathrm{I}}$ et un ensemble fermé $F\subset \mathrm{I}^2$ tels que $\mathbf{D}(F)=\boldsymbol{H}+\boldsymbol{S}$. On peut supposer que $\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{S}=0$.

Désignons par K la projection de F sur l'axe des abscisses et par K_1 et K_2 les ensembles des $x \epsilon K$ pour lesquels on a respectivement $\mathrm{D}(F,x) \epsilon \boldsymbol{H}$ et $\mathrm{D}(F,x) \epsilon \boldsymbol{S}$.

Nous allons montrer que l'ensemble K_2 est fermé. Soit $\{x_n\}$ une suite de points appartenant à K_2 et tendant vers un point x_0. On a $\mathrm{D}(F,x_n) \epsilon \boldsymbol{S}$ pour $n=1,2,\ldots$ La famille $\boldsymbol{S}$ étant finie, il existe un ensemble $S \epsilon \boldsymbol{S}$ et une suite croissante d'indices $\{k_n\}$ telle que $\mathrm{D}(F,x_{k_n})=S$ pour $n=1,2,\ldots$ L'ensemble F étant fermé, on a $\mathrm{D}(F,x_0)\supset S$. Or, S non $\epsilon\, \boldsymbol{H}$, d'où $\mathrm{D}(F,x_0)$ non $\epsilon\, \boldsymbol{H}$ et par conséquent $x_0 \epsilon K_2$.

L'ensemble $K_1=K-K_2$ est donc un F_σ. Pour chaque $x \epsilon K_1$, l'ensemble $\mathrm{D}(F,x)$ est composé d'un seul point et par conséquent l'ensemble $F\cdot(K_1\times\mathrm{I})$ constitue l'image d'une fonction f définie sur K_1 et dont les valeurs appartiennent à I. L'ensemble F étant fermé, la fonction f est continue, de sorte que l'ensemble $f(K_1)$ est un F_σ.

Nous sommes parvenus ainsi à une contradiction, car il résulte facilement de la définition de K_2 et de f que $f(K_1)=\mathrm{N}$.

IV. $\boldsymbol{F}$ étant un sous-ensemble fermé de 2^{I}, il existe une fonction continue $F(x)$ qui transforme l'ensemble C de Cantor en $\boldsymbol{F}$. En posant $F=\underset{x,y}{\mathrm{E}}[y \epsilon F(x)]$, nous obtenons $\boldsymbol{F}=\mathbf{D}(F)$.

$\boldsymbol{K}$ étant un F_σ dans 2^{I}, il existe une fonction continue $K(x)$ qui transforme l'ensemble $\mathrm{C}-(1)$ en $\boldsymbol{K}$. En posant $K=\underset{x,y}{\mathrm{E}}[y \epsilon K(x)]+(1)\times\mathrm{I}$, nous obtenons $\mathbf{D}(K)=\boldsymbol{K}+(\mathrm{I})$.

V. Il suffit de prendre comme $\boldsymbol{P}$ la famille des ensembles composés chacun d'un seul point rationnel de I et de poser $\boldsymbol{G}=2^{\mathrm{I}}-(\mathrm{I})$.