6. *Beweis des Satzes II.* Wir stützen uns auf folgenden allgemeinen Satz (wobei x, y, X, Y und $A(x)$ ihre frühere Bedeutung beibehalten): ist die Menge $\underset{x,y}{E}[y \in A(x)]$ analytisch, so ist auch die Menge $\underset{x}{E}[\overline{\overline{A(x)}} > \aleph_0]$ eine analytische[5]).

Aus (4) folgt $\underset{t}{E}[\mathfrak{m}(\bar{t}) > \aleph_0] = \underset{t}{E}[\overline{\overline{F(t, \varphi(t))}} > \aleph_0]$ und der allgemeine Satz liefert das verlangte Ergebniß, indem man $X = C$, $Y = I^{\aleph_0}$ und $A(t) = F(t, \varphi(t))$ einsetzt.

Bemerkung. Mit Hilfe des allgemeinen Satzes, der besagt, daß falls $\underset{x,y}{E}[y \in A(x)]$ Borelsch, die Menge $\underset{x}{E}[\overline{\overline{A(x)}} = 1]$ von der Klasse CA ist[6]), könnten wir analog beweisen, daß $\underset{t}{E}[\mathfrak{m}(\bar{t}) = 1]$ eine CA-Menge ist.

7. *Beweis des Satzes III.* Wir erhalten ihn aus (4), indem wir berücksichtigen, daß $F(t, \varphi(t))$ eine Borelsche Menge und folglich, falls unabzählbar, von der Mächtigkeit $2^{\aleph_0}$ ist.

Bemerkung. Die hier angewendete Schlußweise kann noch am Beweise eines gewissermaßen analogen Satzes veranschaulicht werden, nämlich des folgenden: existiert eine unabzählbare Menge homöomorpher Abbildungen eines kompakten Raumes auf sich, so gibt es ihrer $2^{\aleph_0}$.

Sei demnach K ein Kompaktum. Bei einer passend gewählten Metrik ist der Raum K^K aller stetigen auf K definierten und die Werte aus K annehmenden Funktionen vollständig und separabel. Die homöomorphen Abbildungen von K auf sich bilden in ihm die Menge

$$H = \underset{f}{E}\Big\{\prod_{x_1, x_2 \in K}[(f(x_1) = f(x_2)) \rightarrow (x_1 = x_2)] \prod_{y \in K} \sum_{x \in K}(y = f(x))\Big\}.$$

Wegen der Kompaktheit des Raumes K und der Abgeschlossenheit der Menge $\underset{y}{E}[y = f(x)]$ ist H eine G_δ-Menge. Ist sie unabzählbar, so ist ihre Mächtigkeit $2^{\aleph_0}$, w. z. b. w.

---

[5]) l. c., *Topologie I*, S. 262.

[6]) ibidem, S. 259.

Remarque sur la loi du logarithme itéré.

Par

J. Marcinkiewicz et A. Zygmund (Wilno).

§ 1. Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ une suite infinie de variables aléatoires indépendantes et bornées. Admettons de plus que

$$\mathcal{E}(X_\nu) = 0,$$

$\mathcal{E}(X)$ désignant, d'une façon générale, l'espérance mathématique de la variable X. Posons pour $n = 1, 2, \ldots$:

$$M_n = \operatorname{Max} |X_n|,$$

$$b_n = \mathcal{E}(X_n^2), \tag{1}$$

$$B_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n. \tag{2}$$

Admettons en outre que $B_n \to \infty$. D'après la loi du logarithme itéré[1]), la probabilité de la relation

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\left|\sum_{\nu=1}^{n} X_\nu\right|}{\sqrt{2 B_n \log\log B_n}} = 1 \tag{3}$$

est égale à 1, pourvu que

$$M_n = o\sqrt{B_n / \log\log B_n}. \tag{4}$$

Le but de cette Note est de démontrer que cette dernière condition ne peut pas être améliorée. Plus précisément, nous allons établir le suivant

---

[1]) A. Kolmogoroff, *Über das Gesetz des iterierten Logarithmus*. Math. Ann. **101** (1933), 126-135. Nous en empruntons quelques raisonnements dans la Note présente.

Théorème 1. *Il existe une suite $\{X_n\}$ de variables aléatoires indépendantes satisfaisant à la condition*

$$M_n = O\sqrt{B_n/\log\log B_n}$$

et telles que la probabilité de (3) *est égale à* 0.

Nous décomposons la démonstration en une série de lemmes.

Lemme 1. *Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$ une suite finie de variables aléatoires indépendantes dont les premiers moments sont égaux à* 0 *et dont les p-ièmes moments sont finis, où $p>1$. Posons:*

$$s = \Big|\sum_{\nu=1}^{n} X_\nu\Big|, \qquad s^* = \operatorname*{Max}_{1\leqslant m\leqslant n} \Big|\sum_{\nu=1}^{m} X_\nu\Big|.$$

On a alors

$$\mathcal{E}(s^{*p}) \leqslant 2\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathcal{E}(s^p). \tag{5}$$

Ce lemme est connu[1]).

Lemme 2. *Si les variables X_ν du lemme* 1 *ont tous leurs moments finis, on a, quel que soit le nombre $a>0$,*

$$\mathcal{E}(e^{as^*}) \leqslant 16\,\mathcal{E}(e^{as}). \tag{6}$$

Nous nous servirons de l'égalité $\cosh u = 1+\frac{u^2}{2!}+\frac{u^4}{4!}+\dots$. En observant que $2p^p/(p-1)^p \leqslant 8$ pour $p\geqslant 2$ et en tenant compte de (5), nous pouvons écrire

$$\mathcal{E}(e^{as^*}) \leqslant 2\mathcal{E}(\cosh as^*) \leqslant 16\,\mathcal{E}(\cosh as) \leqslant 16\,\mathcal{E}(e^{as}), \tag{7}$$

ce qui donne (5).

Nous désignerons désormais par $x_1, x_2, \dots$ la suite de variables aléatoires indépendantes qui n'admettent que deux valeurs: $+1$ et -1, chacune avec la même probabilité 1/2.

Lemme 3. *Soit x une quelconque des variables $x_1, x_2, \dots$. On a pour tout nombre $a>0$*

$$\mathcal{E}(e^{ax}) \leqslant e^{a^2/2}.$$

[1]) J. Marcinkiewicz et A. Zygmund, *Sur les fonctions indépendantes*, Fund. Math. **29**, (1937), pp. 60—90.

En effet,

$$\mathcal{E}(e^{ax}) = \cosh a = 1+\frac{a^2}{2!}+\frac{a^4}{4!}+\dots = 1+\frac{a^2}{2}+\left(\frac{a^2}{2}\right)^2\frac{2^2}{4!}+\dots+\left(\frac{a^2}{2}\right)^n\frac{2^n}{(2n)!}+\dots$$
$$\leqslant 1+\frac{a^2}{2}+\left(\frac{a^2}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2!}+\dots+\left(\frac{a^2}{2}\right)^n\cdot\frac{1}{n!}+\dots = e^{a^2/2}.$$

Lemme 4. *Il existe une constante absolue $\alpha>0$ telle que l'inégalité $|a|\geqslant\alpha$ entraîne*

$$\mathcal{E}(e^{ax}) \leqslant e^{a^2/4}.$$

Cette proposition est une conséquence immédiate de l'égalité $\mathcal{E}(e^{ax}) = \cosh a$.

Dans le reste de la démonstration, nous posons

$$X_\nu = a_\nu x_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \dots)$$

où les a_ν sont des nombres positifs que nous définirons plus loin.

Lemme 5. *Pour tout $a>0$, la somme*

$$S = \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu \tag{8}$$

satisfait à l'inégalité

$$\mathcal{E}(e^{aS}) \leqslant e^{\frac{a^2}{2}B - \frac{a^2}{4}B'},$$

où $B=B_n$ est défini par (1) *et* (2) *et*

$$B' = \sum_{aa_\nu\geqslant\alpha} a_\nu^2. \tag{9}$$

Posons $B'' = B - B'$. On a d'après les lemmes 3 et 4

$$\mathcal{E}(e^{aS}) = \prod_{\nu=1}^{n} \mathcal{E}(e^{ax_\nu}) \leqslant e^{\frac{a^2}{2}B'' + \frac{a^2}{4}B'} = e^{\frac{a^2}{2}B - \frac{a^2}{4}B'}.$$

Lemme 6. *On a (dans la même notation)*

$$\mathcal{E}(e^{as^*}) \leqslant 32\, e^{\frac{a^2}{2}B - \frac{a^2}{4}B'}.$$

C'est une conséquence des lemmes 2 et 5 en remarquant que

$$\mathcal{E}(e^{as}) \leqslant \mathcal{E}(e^{aS}) + \mathcal{E}(e^{-aS}).$$

Dans la suite, le symbole $\mathcal{P}\{X\geqslant A\}$ désignera la probalité de l'inégalité $X\geqslant A$.

Lemme 7. Si $B\geqslant e$, on a pour tout $\gamma>0$ l'inégalité

$$\mathcal{P}\{s^*\geqslant\sqrt{\gamma B\log\log B}\}\leqslant 32e^{-\frac{1}{2}\gamma\left(1+\frac{B'}{2B}\right)\log\log B}, \tag{10}$$

où

$$B'=\sum_{a_\nu\geqslant a\sqrt{B/\gamma\log\log B}} a_\nu^2. \tag{11}$$

En effet, le lemme 6 donne pour $x>0$

$$\mathcal{P}\{s^*\geqslant x\}\leqslant 32e^{-ax+\frac{1}{2}a^2B-\frac{1}{4}a^2B'}, \tag{12}$$

où B' est défini par la formule (9). Posons

$$x=\sqrt{\gamma B\log\log B},\qquad a=x/B=\sqrt{\gamma\log\log B/B}. \tag{13}$$

La définition (9) devient alors identique à (11) et, par substitution des valeurs (13) dans (12), nous obtenons facilement l'inégalité (10).

Lemme 8. Il existe une suite $a_1, a_2, a_3, \ldots$ de nombres positifs, telle qu'en posant

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^2=B_n,\qquad B_n'=\sum_{a_\nu\geqslant a\sqrt{B_n/\gamma\log\log B_n}} a_\nu^2,$$

on a:

1^0 $\qquad B_n\to\infty,$

2^0 $\qquad a_n\leqslant K\sqrt{B_n/\log\log B_n}\qquad (n>n_0),$

3^0 $\qquad B_n'\geqslant\theta B_n\qquad (n>n_0),$

où $K=K(\gamma)$ et $\theta=\theta(\gamma)$ sont des constantes positives indépendantes de n.

Posons: $a_1=1$ et

$$a_n=e^{\lambda n/\log n}/\sqrt{\log n}\qquad (n=2,3,\ldots), \tag{14}$$

où la constante positive λ sera fixée plus loin. En désignant l'égalité asymptotique par $\simeq$, nous vérifions facilement que

$$B_n=\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^2\simeq\sum_{\nu=2}^{n}\frac{e^{2\lambda\nu/\log\nu}}{\log\nu}\simeq\int_2^n\frac{e^{2\lambda u/\log u}}{\log u}du$$
$$\simeq\frac{1}{2\lambda}\int_2^n e^{2\lambda u/\log u}\left(\frac{2\lambda}{\log u}-\frac{2\lambda}{\log^2 u}\right)du=\frac{1}{2\lambda}\left[e^{2\lambda u/\log u}\right]_2^n.$$

Par conséquent:

$$B_n\simeq\frac{1}{2\lambda}e^{2\lambda n/\log n},\qquad \log\log B_n\simeq\log n.$$

Les conditions 1^0 et 2^0 sont ainsi établies. Pour établir la condition 3^0, considérons l'inégalité

$$a_\nu\geqslant a\sqrt{\frac{B_n}{\gamma\log\log B_n}}\simeq\frac{a}{\sqrt{2\lambda\gamma}}\,\frac{e^{\lambda n/\log n}}{\sqrt{\log n}}. \tag{15}$$

C'est à présent que nous fixons la constante λ, en la choisissant suffisamment grande pour que l'on ait $a/\sqrt{2\lambda\gamma}<1$.

L'inégalité (15) sera sûrement vérifiée, pourvu que ν et n soient suffisamment grands et que ν soit compris entre $n-\mu\log n$ et n, où μ est une constante suffisamment petite. Car on a dans ce cas

$$a_\nu\geqslant\frac{e^{\lambda(n-\mu\log n)/\log(n-\mu\log n)}}{\sqrt{\log(n-\mu\log n)}}\geqslant\frac{e^{\lambda(n-\mu\log n)/\log n}}{\sqrt{\log n}}\geqslant e^{-\lambda\mu}\frac{e^{\lambda n/\log n}}{\sqrt{\log n}},$$

ce qui entraîne la relation (15), en supposant que $e^{-\lambda\mu}>a/\sqrt{2\lambda\gamma}$. Par conséquent, on a pour $n>n_0$

$$B_n'\geqslant\sum_{n-\mu\log n}^{n} a_\nu^2\geqslant\mu\log n\,\frac{e^{-2\lambda\mu}e^{2\lambda n/\log n}}{\log n}\geqslant\theta B_n,$$

ce qui achève la démonstration du lemme 8.

Nous écrirons dans la suite s_n^* au lieu de s^*.

Lemme 9. Si la suite $\{a_n\}$ satisfait aux conditions 1^0, 2^0 et 3^0 du lemme 8, on a

$$\mathcal{P}\{s_n^*\geqslant\sqrt{\gamma B_n\log\log B_n}\}\leqslant 32\,e^{-\frac{\gamma}{2}\left(1+\frac{1}{2}\theta\right)\log\log B_n}. \tag{16}$$

En effet, on n'a qu'à appliquer le lemme 7.

Il est évident que le théorème 1 est une conséquence immédiate du suivant

Lemme 10. Soit $\{a_\nu\}$ la suite considérée dans la démonstration du lemme 8; soit $s_n=a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n$. Alors la probabilité de la relation

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{|s_n|}{\sqrt{\varkappa B_n\log\log B_n}}\leqslant 1,\quad \text{où } \varkappa=2/(1+\tfrac{1}{2}\theta(1))<2, \tag{17}$$

est égale à 1.

Ce lemme se déduit de l'inégalité (16) par la même méthode que celle employée par M. Kolmogoroff (loc. cit.) pour démontrer la première partie de son théorème sur le logarithme itéré. Nous reproduisons ici ce raisonnement. Posons $\gamma > \varkappa$ et soit $n_1 < n_2 < \ldots$ une suite d'entiers tels que $B_{n_k} \simeq q^k$, où q désigne un nombre plus grand que 1. Observons que l'on a $\gamma > 1$, donc $\theta(\gamma) \geqslant \theta(1)$, d'où $\frac{1}{2}\gamma(1+\frac{1}{2}\theta(\gamma)) > 1$ et l'inégalité (16) prouve que la série $\sum \mathscr{P}\{s^*_{n_k} \geqslant \sqrt{\gamma B_{n_k} \log\log B_{n_k}}\}$ converge. Désignons par $\mathscr{P}_k\{s_n \geqslant x\}$ la probabilité pour que l'inégalité $s_n \geqslant x$ soit vérifiée par une au moins des valeurs de l'indice n, assujetties à la condition $n_{k-1} < n \leqslant n_k$. Alors si $\varkappa' > \gamma$, le nombre k étant suffisamment grand, on a

$$\mathscr{P}_k\{s^*_n \geqslant \sqrt{\varkappa' q B_n \log\log B_n}\} \leqslant \mathscr{P}\{s^*_{n_k} \geqslant \sqrt{\varkappa' q B_{n_{k-1}} \log\log B_{n_{k-1}}}\} \leqslant$$
$$\leqslant \mathscr{P}\{s^*_{n_k} \geqslant \sqrt{\gamma B_{n_k} \log\log B_{n_k}}\}.$$

La dernière probabilité formant une série convergente et les différences $\varkappa' - \varkappa$ et $q-1$ étant aussi petites que l'on veut, on voit sans peine que la relation (17) est presque sûre, si l'on y remplace $\varkappa$ par $\varkappa + \varepsilon$, quel que soit $\varepsilon > 0$. On peut donc poser aussi $\varepsilon = 0$ et la démonstration du lemme 10 est achevée.

§ 2. Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs moyennes nulles. Posons:

$$b = \mathscr{E}(X_\nu^2), \qquad B = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$$

et supposons que

$$|X_\nu| \leqslant M \quad \text{pour} \quad \nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{18}$$

Posons aussi $s = |X_1 + X_2 + \ldots + X_n|$. On sait[1]) que dans ces conditions

$$\mathscr{P}\{s \geqslant x\} \leqslant 2e^{(-x^2/2B)(1-\theta)} \quad \text{où} \quad \theta = xM/2B, \tag{19}$$

pourvu que

$$x \leqslant B/M. \tag{20}$$

En particulier, l'inégalité (19) entraîne $\mathscr{P}\{s \geqslant x\} \leqslant 2e^{-x^2/4B}$.

[1]) Kolmogoroff, loc. cit., p. 127.

Dans le cas où les variables X_ν ne sont pas nécessairement bornées, on a une inégalité analogue: si

$$\mathscr{E}(X_\nu^k) \leqslant \tfrac{1}{2} b_\nu H^{k-2} k! \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n;\ k = 3, 4, \ldots), \tag{18 bis}$$

alors

$$\mathscr{P}\{s \geqslant x\} \leqslant e^{(-x^2/2B)(1-\theta')} \quad \text{où} \quad \theta' = 2Hx/B, \tag{19 bis}$$

pourvu que

$$x \leqslant B/2H\,^{1}). \tag{20 bis}$$

Au moyen des lemmes 1 et 2, p. 216, on obtient des propositions analogues pour les expressions

$$s^* = \max_{1 \leqslant \nu \leqslant n} |X_1 + X_2 + \ldots + X_n|,$$

à savoir le

Théorème 2. *On a dans les conditions* (18) *et* (20)

$$\mathscr{P}\{s^* \geqslant x\} \leqslant 32\, e^{(-x^2/2B)(1-\theta)} \quad \textit{où} \quad \theta = xM/2B \tag{21}$$

et dans les conditions (18 bis) *et* (20 bis)

$$\mathscr{P}\{s^* \geqslant x\} \leqslant 32\, e^{(-x^2/2B)(1-\theta')} \quad \textit{où} \quad \theta' = 2xH/B. \tag{21bis}$$

Si l'on applique l'inégalité (6), les démonstrations de (21) et (21 bis) ne sont que des répétitions de celles de (19) et (19 bis). Il suffit donc de se borner à l'inégalité (21). Soit $a > 0$. En tenant compte de (6), on peut écrire

$$\mathscr{P}\{s^* \geqslant x\} \leqslant e^{-ax}\mathscr{E}(e^{as^*}) \leqslant 16\, e^{-ax}\mathscr{E}(e^{as}) \leqslant 16\, e^{-ax}[\mathscr{E}(e^{aS}) + \mathscr{E}(e^{-aS})],$$

où $S = X_1 + X_2 + \ldots + X^n$. D'après M. Kolmogoroff (loc. cit., p. 127),

$$\mathscr{E}(e^{aS}) \leqslant e^{\frac{a^2B}{2}\left(1+\frac{aM}{2}\right)}, \tag{22}$$

pourvu que $aM \leqslant 1$. La même inégalité subsiste évidemment pour $\mathscr{E}(e^{-aS})$. En rapprochant (22) aux inégalités précédentes, on obtient

$$\mathscr{P}\{s^* \geqslant x\} \leqslant 32\, e^{\frac{a^2B}{2}\left(1+\frac{aM}{2}\right)-ax} \tag{23}$$

et l'inégalité (23) se transforme en (19) par la substitution $a = x/B$, qui est légitime en vertu de (20).

[1]) S. Bernstein, *Calcul des probabilités* (en russe), 3e éd. (1934), p. 155 sqq. L'inégalité (19bis) n'est pas identique à celle de M. Bernstein, mais elle se démontre par la même méthode.

Ajoutons au sujet du th. 2 que dans les conditions (18) et (20) on a

$$\mathscr{P}\{s^* \geqslant x\} \leqslant 32\, e^{-x/4M} \qquad \text{pour} \quad x \geqslant B/M \tag{24}$$

et dans les conditions (18bis) et (20bis) on a

$$\mathscr{P}\{s^* \geqslant x\} \leqslant 32\, e^{-x/16H} \qquad \text{pour} \quad x \geqslant B/4H. \tag{24 bis}$$

L'inégalité (24) s'obtient de (23), en y posant $a=1/M$. L'inégalité (24 bis) se démontre d'une façon analogue. En même temps, si l'on remplace dans (24) et (24 bis) s^* par s, le facteur 32 dans les membres droits peuvent être remplacés par 2 (cf. Kolmogoroff, loc. cit.).

La seconde partie du th. 2 permet aussi de généraliser légèrement le théorème sur le logarithme itéré, en l'étendant aux variables pas nécessairement bornées. Soit $X_1, X_2, \ldots$ une suite infinie de variables aléatoires indépendantes, à valeurs moyennes nulles. Admettons que les X_ν satisfassent aux inégalités (18bis), où $H=H_\nu$ $(\nu=1,2,\ldots)$. Posons $\overline{H}_\nu = \mathrm{Max}\,(H_1, H_2, \ldots, H_\nu)$ et supposons que

$$\overline{H}_n = o\sqrt{B_n/\log\log B_n} \qquad (B_n \to \infty). \tag{25}$$

Dans ces hypothèses, la probabilité de l'inégalité (3) est égale à 1.

La démonstration de ce théorème ne diffère pas essentiellement de celle de M. Kolmogoroff. Notons seulement que la démonstration de la première partie de (3), à savoir de l'inégalité $\overline{\lim} \ldots \leqslant 1$, est une conséquence facile de (21 bis).

Il résulte du th. 1 que le symbole o ne peut pas être remplacé par O dans la condition (25).

Algebraic Characterizations of Special Boolean Rings[1].

By

M. H. Stone (Cambridge, Mass. U. S. A.).

In a paper entitled *The Theory of Representations for Boolean Algebras* [2]), we have introduced and discussed a certain classification of the ideals in a Boolean ring (or generalized Boolean algebra). Here we propose to carry out a detailed study of that classification, with the particular purpose of discovering what types of Boolean ring can be characterized by properties of the ideal-structure. In order to make our examination complete, we have to consider many details of a somewhat tedious and uninteresting nature. For the convenience of the reader who prefers to pass over such details, we adopt a synthetic, rather than analytic, form of presentation; and formulate our results in a series of theorems and tables which, we hope, can be easily and rapidly surveyed.

[1]) Parts of this paper (in particular §§ 1, 5, 12 and most of §§ 6, 7, 8, 10, 11) were written in 1933-4 and communicated to the Polish Mathematical Society at a meeting in Warsaw on September 12, 1935. Other parts (in particular §§ 2, 3, 4, 9 and certain aspects of §§ 6, 7, 8, 10, 11) were obtained in 1936-7 while the writer was a Fellow of the John Simon Guggenheim Memorial Foundation in residence at the Institute for Advanced Study (Princeton) as a temporary member.

[2]) M. H. Stone, Trans. Amer. Math. Soc. 40 (1936), pp. 37-111. A knowledge of this paper is assumed here, and references to it made by such citations as „R Th. 24", „R Def. 8", and so on.