Soit E un ensemble arbitraire de la famille $B(F)$. Il existe une suite infinie $E_2, E_4, E_6, \ldots$ d'ensembles de la famille F, telle que

$$E \epsilon B(E_2, E_4, E_6, \ldots). \tag{7}$$

Cette propriété de la famille $B(F)$ n'est pas évidente. On peut la démontrer comme il suit.

Soit $\Phi = \sum B(H_1, H_2, \ldots)$, où la sommation s'étend à toutes les suites infinies d'ensembles de la famille F. On a évidemment: 1⁰ $E \epsilon B(E, E, \ldots) \subset \Phi$ pour tout $E \epsilon F$, donc $F \subset \Phi$; 2⁰ $E_i \epsilon B(H_1^i, H_2^i, \ldots)$ pour $E_i \epsilon \Phi$ où $H_j^i \epsilon F$ et $i = 1, 2, \ldots$, $j = 1, 2, \ldots$, d'où $\sum_{i=1}^{\infty} E_i \epsilon \sum_{i=1}^{\infty} B(H_1^i, H_2^i, \ldots) \subset B(\{H_j^i\}) \subset \Phi$ et pareillement $\prod_{i=1}^{\infty} E_i \epsilon \Phi$. Vu la définition de la famille $B(F)$, on a ainsi $B(F) \subset \Phi$, de sorte que, si $E \epsilon B(F)$, l'ensemble E est élément d'un terme de la somme Φ, c. q. f. d.

Or, on a d'après (6)

$$B(E_2, E_4, E_6, \ldots) \subset A(E_2, E_4, E_6, \ldots) \tag{8}$$

et, en vertu de (7), (8) et (2), il existe une suite infinie de nombres naturels $p_1, p_2, \ldots$, telle que

$$E = h(E_{2p_1}, E_{2p_2}, \ldots). \tag{9}$$

Posons

$$E_{2i-1} = E_{2p_i} \qquad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Nous aurons d'après (9)

$$E = h(E_1, E_3, E_5, \ldots) \tag{10}$$

et d'après (7)

$$h(E_1, E_3, E_5, \ldots) \epsilon B(E_2, E_4, E_6, \ldots),$$

ce qui donne en vertu de (3) et (10)

$$f(E_1, E_2, E_3, \ldots) = h(E_1, E_3, E_5, \ldots) = E. \tag{11}$$

Comme $E_i \epsilon F$ pour $i = 1, 2, \ldots$, la formule (11) prouve que $E \epsilon f(F, F, F, \ldots)$. Or, l'ensemble E de la famille $B(F)$ étant supposé arbitraire, on a

$$B(F) \subset f(F, F, F, \ldots),$$

ce qui donne avec (5) l'égalité (1), q. f. d.

Zur Geometrisierung der abzählbaren Ordnungstypen.

Von

Stanisław Hartman (Warszawa).

1. Der vorliegende Beitrag steht in engem Zusammenhang mit der Arbeit von Herrn C. Kuratowski, *Sur la géométrisation des types d'ordre dénombrables* [1]). Es wurde dort die bekannte Lebesguesche Zerlegung der Cantorschen Menge angewendet, die erlaubt, jedem Punkte dieser Menge einen abzählbaren Ordnungstypus eindeutig zuzuordnen, wobei alle diesen Ordnungstypen ihre nicht leeren Urbilder besitzen.

Sei demnach

$$r_1, r_2, \ldots r_k, \ldots \tag{1}$$

eine Folge aller rationalen Zahlen und C das Cantorsche Diskontinuum. Der Zahl r_k werde die Menge W_{r_k} aller derjenigen Punkte von C zugeordnet, deren Abszissen an der k-ten Stelle ihrer tryadischen Bruchentwicklung die Ziffer 2 haben. Die Gesamtheit der so definierten (lauter in C abgeschlossenen und offenen) Mengen W_{r_k} bildet das sog. Lebesguesche *Sieb*. Indem wir mit t^k die k-te Ziffer der tryadischen Entwicklung der Zahl $t \epsilon C$ bezeichnen, haben wir die Äquivalenz $(t \epsilon W_{r_k}) \equiv (t^k = 2)$.

Wir setzen ferner $M_t = \underset{r}{E}[t \epsilon W_r]$. Der Ordnungstypus $\overline{M}_t$ (der Relation $>$ nach) der Menge M_t soll schlechthin mit $\bar{t}$ bezeichnet werden. Das ist eben die anfangs erwähnte Funktion, welche dem Punkte $t \epsilon C$ den Ordnungstypus $\bar{t}$ zuordnet. Jedem abzählbaren Typus τ entspricht als Urbild die Menge $\underset{t}{E}[\bar{t} = \tau]$. Einer Menge Φ

[1]) Fund. Math. **28**, S. 167—185.

abzählbarer Ordnungstypen lassen wir die Punktmenge $\underset{t}{E}[\bar{t}\in\Phi]$ entsprechen, wobei Φ *von der* (projektiven) *Klasse* P_n bzw. C_n, bzw. *Borelsch* heißen soll, falls $\underset{t}{E}[\bar{t}\in\Phi]$ von der Klasse P_n bzw. C_n, bzw. Borelsch ist.

2. *Definition.* $\mathfrak{m}(\tau)$ *bedeute die Mächtigkeit der Menge aller eineindeutigen ordnungstreuen Abbildungen einer Menge Z vom Typus* τ *auf sich selbst*, d. h. solcher Abbildungen, für welche $[x,y\in Z;\ x\prec y]\equiv[f(x), f(y)\in Z;\ f(x)\prec f(y)]$ ist.

Es ist klar, daß die so definierte Kardinalzahl lediglich vom Typus τ abhängt und daß $\mathfrak{m}(\tau)$ die Mächtigkeit der Menge $T(Z,Y)$ aller ordnungstreuen Abbildungen von Z auf Y ist, wobei $\overline{Y}=\tau$. Somit ist $\mathfrak{m}(\tau)=\mathfrak{m}(\overline{Z})=\mathfrak{m}(\overline{Y})=\overline{\overline{T(Z,Y)}}$. *Wir werden im weiteren stets voraussetzen, daß das Argument* τ *der Typusfunktion* $\mathfrak{m}(\tau)$ *ein abzählbarer Typus ist.*

Es ist offensichtlich $\mathfrak{m}(\tau)\leqslant 2^{\aleph_0}$. Bedeutet α eine Ordnungszahl, so ist $\mathfrak{m}(\alpha)=1$, was aber nicht als charakteristische Eigenschaft der Ordnungszahlen gelten kann, da z. B. auch $\mathfrak{m}(\omega+\omega^*)=1$ ist. Es ist leicht zu zeigen, daß z. B. $\mathfrak{m}(\eta)=2^{\aleph_0}$ und $\mathfrak{m}(\omega^*+\omega)=\aleph_0$ ist.

Es wurde von Herrn Kuratowski, l. c. S. 171 und 173, bewiesen, daß die Menge $\underset{t}{E}[\bar{t}=\tau]$ für jedes τ eine analytische ist, wobei es sich aber bekanntlich von den Mengen $\underset{t}{E}[\bar{t}=\alpha]$, wo α eine beliebige Ordnungszahl bedeutet (also von den sog. *Konstituenten*) mehr behaupten läßt, nämlich, daß sie Borelsche Mengen sind.

Wir stellen uns vor allem als Ziel eine die Menge der Ordnungszahlen als echte Teilmenge umfassende Typenmenge auszusondern, für welche das letztere noch zutrifft.

So sollen nachstehend folgende Sätze bewiesen werden:

Satz I. *Ist* $\mathfrak{m}(\tau)\leqslant\aleph_0$, *so ist die Menge* $\underset{t}{E}[\bar{t}=\tau]$ *eine Borelsche.*

Satz II. *Die Menge* $\underset{t}{E}[\mathfrak{m}(\bar{t})>\aleph_0]$ *ist eine analytische.*

Satz III. *Ist* $\mathfrak{m}(\tau)>\aleph_0$, *so ist* $\mathfrak{m}(\tau)=2^{\aleph_0}$ *(d. h. die Funktion* $\mathfrak{m}(\tau)$ *realisiert die Kontinuumhypothese).*

Anläßlich des Satzes I sei sofort angedeutet, daß die Bedingung $\mathfrak{m}(\tau)\leqslant\aleph_0$ weit nicht notwendig ist, damit die Menge $\underset{t}{E}[\bar{t}=\tau]$ Borelsch sei: es ist z. B. $\underset{t}{E}[\bar{t}=\eta]$ eine Borelsche Menge. Die Frage, welche Typen genau, und ob nicht alle Borelsch sind, bleibt bisher unentschieden.

3. Indem wir mit $\xi=(\xi^1,\xi^2,\ldots)$ bzw. $\zeta=(\zeta^1,\zeta^2,\ldots)$ einen Punkt des Hilbertschen Würfels $I^{\aleph_0}$, d. h. eine Folge im Interval $\langle 0,1\rangle$ liegender Zahlen bezeichnen, führen wir als Hilfsbegriff die Menge $F(t,\zeta)$ ein, die aus allen Folgen ξ bestehen soll, deren Elemente („Koordinaten" des Punktes ξ) eine mit M_t identische Menge bilden und die Bedingung

$$(\xi^i<\xi^j)\equiv(\zeta^i<\zeta^j) \tag{2}$$

für alle i, j befriedigen. In Symbolen drücken wir diese Definition folgendermaßen aus:

$$[\xi\in F(t,\zeta)]\equiv\prod_n[\sum_k(\xi^n=r_k)\,(t^k=2)]\,[(t^n=2)\to$$
$$\to\sum_k(\xi^k=r_n)]\cdot\prod_{ij}[(\xi^i<\xi^j)\equiv(\zeta^i<\xi^j)].$$

Daraus entnehmen wir, daß die Menge $F(t,\zeta)$ eine Borelsche (und zwar von der Klasse $F_{\sigma\delta}$) ist.

Bedeutet $Z(\zeta)$ die Menge der Elemente der Folge ζ, so gilt der

Hilfssatz 1. *Aus* $\bar{t}=\overline{Z(\zeta)}=\tau$ *folgt* $\overline{\overline{F(t,\zeta)}}=\mathfrak{m}(\tau)$.

Beweis. Sei f eine ordnungstreue Abbildung der Menge $Z(\zeta)$ auf M_t, d. h. ein Element der Menge $T(Z(\zeta),M_t)$. Eine solche Abbildung existiert, weil $\overline{Z(\zeta)}=\overline{M}_t$ ist. Wir setzen $\xi^i=f(\zeta^i)$ für $i=1,2,\ldots$ Dann ist $Z(\xi)=M_t$ und es gilt (2). Das bedeutet, daß ξ ein Element von $F(t,\zeta)$ ist. Auf diese Weise wird jeder der Menge $T(Z(\zeta),M_t)$ angehörenden Abbildung ein Punkt von $I^{\aleph_0}$ zugeordnet, und zwar verschiedenen Abbildungen verschiedene, sich bloß durch die Ordnung der Koordinaten unterscheidende Punkte. Umgekehrt: jeder Punkt $\xi=(\xi^1,\xi^2,\ldots)$ von $I^{\aleph_0}$, für welchen $Z(\xi)=M_t$ ist und dessen

Koordinaten die Bedingung (2) erfüllen, wird auf obige Weise einer Abbildung $f\in T(Z(\zeta),M_t)$ zugeordnet, und zwar derjenigen, für welche $f(\zeta^i)=\xi^i$ (wo $i=1,2,\dots$) gilt. Durch die hergestellte eineindeutige Zuordnung zwischen den Elementen der Mengen $T(Z(\zeta),M_t)$ und $F(t,\zeta)$ wird die Gleichheit ihrer Mächtigkeiten und, unter Zuziehung der Definition von $\mathfrak{m}(\tau)$, der Hilfssatz 1 bewiesen.

Hilfssatz 2. *Ist $Z(\zeta)=M_s$ für ein $s\in C$, so besteht die Äquivalenz* $(\bar t=\bar s)\equiv\sum_{\xi}[\xi\in F(t,\zeta)]$ [2].

Beweis. Sind die Mengen M_t und M_s ordnungsähnlich, so muß eine ordnungstreue Abbildung f von M_s auf M_t existieren. Setzen wir $\xi^i=f(\zeta^i)$, so ist $Z(\xi)=M_t$ und die Bedingung (2) erfüllt; daher $\xi\in F(t,\zeta)$. Umgekehrt: gilt die letzte Beziehung, so bewerkstelligt die Funktion, welche für jedes i der Zahl ζ^i die Zahl ξ^i zuordnet, eine ordnungstreue Abbildung von M_s auf M_t, weswegen $\bar t=\bar s$.

4. ***Beweis des Satzes I.*** Wir erinnern zuerst an folgenden allgemeinen Satz: sind X,Y zwei separable vollständige Räume und jedem Punkte $x\in X$ eine Menge $A(x)\subset Y$ (die auch leer sein kann) zugeordnet, ist ferner die Menge $\underset{xy}{E}[y\in A(x)]$ eine Borelsche und für jedes x $\overline{\overline{A(x)}}\leqslant\aleph_0$, so ist die Menge $\underset{x}{E}\sum_{y}(y\in A(x))$ (d. h. die Menge der x, für welche $A(x)$ nicht leer ist) auch eine Borelsche [3]. Diese Menge darf man offenbar als Projektion von $\underset{x,y}{E}[y\in A(x)]$ auf X nach Y ansehen, wobei $A(x)$ Querschnitte der projizierten Menge bedeuten, die man erhält, wenn man durch x „zu Y parallele Geraden“ führt.

Ist nun $\bar s=\overline{Z(\zeta)}=\tau$, und daher $\mathfrak{m}(\bar s)\leqslant\aleph_0$, so ist für $\bar t=\bar s=\overline{Z(\zeta)}$ dem Hilfssatze 1 zufolge $\overline{\overline{F(t,\zeta)}}\leqslant\aleph_0$. Ist $\bar t\neq\overline{Z(\zeta)}$, so ist die Menge $F(t,\zeta)$ leer, d. h. jedenfalls $\overline{\overline{F(t,\zeta)}}\leqslant\aleph_0$. Auf Grund des Hilfssatzes 2 haben wir $\underset{t}{E}[\bar t=\bar s]=\underset{t}{E}\sum_{\xi}(\xi\in F(t,\zeta))$. Wenden wir nun den angeführten allgemeinen Satz auf $X=C$, $Y=I^{\aleph_0}$ und $A(t)=F(t,\zeta)$ an, so erhalten wir ohne weiteres die Behauptung des zu beweisenden Satzes.

---

[2]) Vgl. l. c., Fund. Math. **28.**, S. 170.
[3]) Vgl. z. B. C. Kuratowski, *Topologie I*, Monografie Matematyczne, Warszawa-Lwów 1934, S. 263.

Bemerkung. Sei $\mu(t)$ eine Funktion, die jedem Punkte $t\in C$ einen abzählbaren Ordnungstypus zuordnet. Die Funktion heißt *analytisch*, falls die Menge $\underset{t,s}{E}[(t\in C)(s\in C)(\bar s=\mu(t))]$ eine analytische ist. Herr Kuratowski hat bewiesen [4]), daß wenn Φ eine Borelsche Typenmenge und $\mu(t)$ eine analytische Funktion ist, so ist das Urbild $\mu^{-1}(\Phi)$ ebenso eine Borelsche Menge. Aus dem Satze I folgt daher, daß die mittels einer analytischen Funktion $\mu(t)$ gebildeten Urbildmengen $\mu^{-1}(\tau)$, wenn $\mathfrak{m}(\tau)\leqslant\aleph_0$, lauter Borelsche Mengen sind. In der Tat, τ spielt hier die Rolle der Menge Φ, die in diesem Falle aus dem einzigen Element τ besteht, und auf Grund des Satzes I eine Borelsche Menge ist.

5. Für weitere Schlüsse wird uns eine Beziehung nötig sein, die jedem t eine aus allen Elementen der Menge M_t gebildete Folge $\varphi(t)$ eindeutig zuordnet. Die Ordnungsvorschrift zur Bildung der Folgen $\varphi(t)$ darf übrigens beliebig gewählt werden, wenn auch nur unter der Bedingung, daß die Funktion $\varphi(t)$ eine Bairesche sei.

Sei also für ein gegebenes t

$$r_{k_1}, r_{k_2}, \dots, r_{k_i}, \dots \tag{3}$$

eine Folge aller Elemente der Menge M_t. Wir wollen annehmen, daß die Indizes k_i eine wachsende Folge bilden (ihr Sinn ist durch die Folge (1) bestimmt). Dann bezeichnen wir eben die Folge (3) mit $\varphi(t)$ un haben demgemäß:

$$(\xi=\varphi(t))\equiv\prod_n\{\sum_k[(\xi^n=r_k)(t^k=2)\prod_j((\xi^{n+1}=r_j)\to(j>k))]\}$$
$$\{(t^n=2)\to\sum_k(\xi^k=r_n)\}.$$

Diese Formel zeigt, daß die Menge $\underset{\xi,t}{E}[\xi=\varphi(t)]$ Borelsch (und zwar von der Klasse $F_{\sigma\delta}$) und somit daß $\varphi(t)$ eine Bairesche Funktion ist. Dann ist aber die Menge $\underset{t,\xi}{E}[\xi\in F(t,\varphi(t))]$ eine Borelsche.

Wir bemerken noch, daß wegen $Z(\varphi(t))=M_t$ die Gleichheit $\overline{Z(\varphi(t))}=\bar t$ besteht und daher auf Grund des Hilfssatzes 1

$$\overline{\overline{F(t,\varphi(t))}}=\mathfrak{m}(\bar t) \tag{4}$$

gilt.

---

[4]) l. c., Fund. Math. **28.**, S. 176.

6. ***Beweis des Satzes II.*** Wir stützen uns auf folgenden allgemeinen Satz (wobei x, y, X, Y und $A(x)$ ihre frühere Bedeutung beibehalten): ist die Menge $\underset{x,y}{E}[y \in A(x)]$ analytisch, so ist auch die Menge $\underset{x}{E}[\overline{\overline{A(x)}} > \aleph_0]$ eine analytische [5]).

Aus (4) folgt $\underset{t}{E}[\mathfrak{m}(\bar{t}) > \aleph_0] = \underset{t}{E}[\overline{\overline{F(t,\varphi(t))}} > \aleph_0]$ und der allgemeine Satz liefert das verlangte Ergebniß, indem man $X = C$, $Y = I^{\aleph_0}$ und $A(t) = F(t, \varphi(t))$ einsetzt.

Bemerkung. Mit Hilfe des allgemeinen Satzes, der besagt, daß falls $\underset{x,y}{E}[y \in A(x)]$ Borelsch, die Menge $\underset{x}{E}[\overline{\overline{A(x)}} = 1]$ von der Klasse CA ist [6]), könnten wir analog beweisen, daß $\underset{t}{E}[\mathfrak{m}(\bar{t}) = 1]$ eine CA-Menge ist.

7. ***Beweis des Satzes III.*** Wir erhalten ihn aus (4), indem wir berücksichtigen, daß $F(t, \varphi(t))$ eine Borelsche Menge und folglich, falls unabzählbar, von der Mächtigkeit $2^{\aleph_0}$ ist.

Bemerkung. Die hier angewendete Schlußweise kann noch am Beweise eines gewissermaßen analogen Satzes veranschaulicht werden, nämlich des folgenden: existiert eine unabzählbare Menge homöomorpher Abbildungen eines kompakten Raumes auf sich, so gibt es ihrer $2^{\aleph_0}$.

Sei demnach K ein Kompaktum. Bei einer passend gewählten Metrik ist der Raum K^K aller stetigen auf K definierten und die Werte aus K annehmenden Funktionen vollständig und separabel. Die homöomorphen Abbildungen von K auf sich bilden in ihm die Menge

$$H = \underset{f}{E}\Big\{\prod_{x_1, x_2 \in K}[(f(x_1) = f(x_2)) \rightarrow (x_1 = x_2)] \prod_{y \in K} \sum_{x \in K}(y = f(x))\Big\}.$$

Wegen der Kompaktheit des Raumes K und der Abgeschlossenheit der Menge $\underset{y}{E}[y = f(x)]$ ist H eine G_δ-Menge. Ist sie unabzählbar, so ist ihre Mächtigkeit $2^{\aleph_0}$, w. z. b. w.

---

5) l. c., *Topologie I*, S. 262.

6) ibidem, S. 259.

Remarque sur la loi du logarithme itéré.

Par

J. Marcinkiewicz et A. Zygmund (Wilno).

§ 1. Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ une suite infinie de variables aléatoires indépendantes et bornées. Admettons de plus que

$$\mathcal{E}(X_\nu) = 0,$$

$\mathcal{E}(X)$ désignant, d'une façon générale, l'espérance mathématique de la variable X. Posons pour $n = 1, 2, \ldots$:

$$M_n = \operatorname{Max} |X_n|,$$

(1)
$$b_n = \mathcal{E}(X_n^2),$$

(2)
$$B_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n.$$

Admettons en outre que $B_n \rightarrow \infty$. D'après la loi du logarithme itéré [1]), la probabilité de la relation

(3)
$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\left|\sum_{\nu=1}^{n} X_\nu\right|}{\sqrt{2B_n \log\log B_n}} = 1$$

est égale à 1, pourvu que

(4)
$$M_n = o\sqrt{B_n / \log\log B_n}.$$

Le but de cette Note est de démontrer que cette dernière condition ne peut pas être améliorée. Plus précisément, nous allons établir le suivant

---

1) A. Kolmogoroff, *Über das Gesetz des iterierten Logarithmus*. Math. Ann. **101** (1933), 126-135. Nous en empruntons quelques raisonnements dans la Note présente.