Sur un problème de la théorie générale des ensembles concernant les familles boreliennes d'ensembles.

Par

W. Sierpiński (Warszawa).

F étant une famille donnée d'ensembles (formés d'éléments quelconques) désignons par $B(F)$ la plus petite famille Φ d'ensembles (c. à d. la partie commune de toutes les familles Φ d'ensembles) satisfaisant aux trois conditions suivantes:

1° $F \subset \Phi$,

2° Toute somme d'une infinité dénombrable d'ensembles de la famille Φ appartient à Φ,

3° Tout produit d'une infinité dénombrable d'ensembles de la famille Φ appartient à Φ.

En resolvant un problème posé par M. F. Hausdorff, j'ai démontré[1]) qu'il n'existe aucune fonction de Hausdorff[2]) $f(E_1, E_2, \ldots)$ telle qu'on ait

$$(1) \qquad f(F, F, F, \ldots) = B(F) \quad ^{3)},$$

quelle que soit la famille F d'ensembles.

[1]) Fund. Math., 10, p. 427.

[2]) La fonction $f(E_1, E_2, \ldots)$ d'une suite infinie d'ensembles s'appelle *fonction de Hausdorff*, s'il existe un ensemble N de suites infinies de nombres naturels, tel que $f(E_1, E_2, \ldots) = \sum_N E_{n_1} E_{n_2} \ldots$, la sommation s'étendant à toutes les suites infinies $(n_1, n_2, \ldots)$ appartenant à N.

[3]) $F_1, F_2, \ldots$ étant des familles d'ensembles, $f(F_1, F_2, \ldots)$ désigne la famille de tous les ensembles $f(E_1, E_2, \ldots)$ où $E_i \in F_i$ pour $i = 1, 2, \ldots$

Le but de cette Note est de démontrer qu'*il existe une fonction* $f(E_1, E_2, \ldots)$ (qui fait correspondre à toute suite infinie d'ensembles $E_1, E_2, \ldots$ un ensemble $f(E_1, E_2, \ldots)$ bien déterminé par cette suite) *telle qu'on a la formule* (1), *quelle que soit la famille d'ensembles F.*

Démonstration. F étant une famille donnée d'ensembles, désignons par $A(F)$ la famille de tous les ensembles de la forme

$$\sum_{n_1, n_2, \ldots} E_{n_1} E_{n_1, n_2} E_{n_1, n_2, n_3} \ldots,$$

$\{E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ étant un système quelconque d'ensembles de la famille F et la sommation $\sum_{n_1, n_2, \ldots}$ s'étendant à toutes les suites infinies de nombres naturels.

Comme l'a démontré M. Hausdorff[4]), il existe une fonction de Hausdorff $h(E_1, E_2, \ldots)$, telle qu'on a la formule

$$(2) \qquad h(F, F, F, \ldots) = A(F), \quad ^{5)}$$

quelle que soit la famille d'ensembles F.

Etant donnée une famille d'ensembles $F_0 = (E_1, E_2, \ldots)$, désignons par $B(E_1, E_2, \ldots)$ la famille $B(F_0)$.

Définissons maintenant la fonction $f(E_1, E_2, \ldots)$ d'une suite infinie d'ensembles comme il suit. Posons:

$$(3) \quad f(E_1, E_2, E_3, \ldots) = h(E_1, E_3, E_5, \ldots), \text{ si } h(E_1, E_3, E_5, \ldots) \in B(E_2, E_4, E_6, \ldots),$$

$$(4) \quad f(E_1, E_2, E_3, \ldots) = E_1, \quad \text{si} \quad h(E_1, E_3, E_5, \ldots) \text{ non } \in B(E_2, E_4, E_6, \ldots).$$

Je dis que la fonction $f(E_1, E_2, E_3, \ldots)$, ainsi définie, jouit des propriétés désirées.

En effet, il résulte de (3) et (4) (vu que $F_1 \subset B(F_1) \subset B(F_2)$ pour $F_1 \subset F_2$) que

$$(5) \qquad f(F, F, F, \ldots) \subset B(F),$$

quelle que soit la famille F d'ensembles. Or, on sait que

$$(6) \qquad B(F) \subset A(F),$$

quelle que soit la famille F d'ensembles[6]).

[4]) F. Hausdorff, *Mengenlehre*, Berlin-Leipzig 1927, p. 93.

[5]) C'est la fonction de Hausdorff correspondant à l'ensemble N de suites infinies $(n_1, n_2, n_3, \ldots)$, telles que la suite infinie

$$n_1, \quad n_2 - n_1, \quad n_3 - n_2, \quad n_4 - n_3, \quad \ldots$$

est une suite extraite de la suite géométrique

$$1, \quad 2, \quad 4, \quad 8, \quad 16, \quad \ldots$$

[6]) Voir p. ex. F. Hausdorff, l. c., p. 93.

Soit E un ensemble arbitraire de la famille $B(F)$. Il existe une suite infinie $E_2, E_4, E_6, \dots$ d'ensembles de la famille F, telle que

$$E \epsilon B(E_2, E_4, E_6, \dots). \tag{7}$$

Cette propriété de la famille $B(F)$ n'est pas évidente. On peut la démontrer comme il suit.

Soit $\Phi = \sum B(H_1, H_2, \dots)$, où la sommation s'étend à toutes les suites infinies d'ensembles de la famille F. On a évidemment: 1^0 $E \epsilon B(E, E, \dots) \subset \Phi$ pour tout $E \epsilon F$, donc $F \subset \Phi$; 2^0 $E_i \epsilon B(H_1^i, H_2^i, \dots)$ pour $E_i \epsilon \Phi$ où $H_j^i \epsilon F$ et $i = 1, 2, \dots$, $j = 1, 2, \dots$, d'où $\sum_{i=1}^{\infty} E_i \epsilon \sum_{i=1}^{\infty} B(H_1^i, H_2^i, \dots) \subset B(\{H_j^i\}) \subset \Phi$ et pareillement $\prod_{i=1}^{\infty} E_i \epsilon \Phi$. Vu la définition de la famille $B(F)$, on a ainsi $B(F) \subset \Phi$, de sorte que, si $E \epsilon B(F)$, l'ensemble E est élément d'un terme de la somme Φ, c. q. f. d.

Or, on a d'après (6)

$$B(E_2, E_4, E_6, \dots) \subset A(E_2, E_4, E_6, \dots) \tag{8}$$

et, en vertu de (7), (8) et (2), il existe une suite infinie de nombres naturels $p_1, p_2, \dots$, telle que

$$E = h(E_{2p_1}, E_{2p_2}, \dots). \tag{9}$$

Posons

$$E_{2i-1} = E_{2p_i} \qquad \text{pour} \quad i = 1, 2, \dots .$$

Nous aurons d'après (9)

$$E = h(E_1, E_3, E_5, \dots) \tag{10}$$

et d'après (7)

$$h(E_1, E_3, E_5, \dots) \epsilon B(E_2, E_4, E_6, \dots),$$

ce qui donne en vertu de (3) et (10)

$$f(E_1, E_2, E_3, \dots) = h(E_1, E_3, E_5, \dots) = E. \tag{11}$$

Comme $E_i \epsilon F$ pour $i = 1, 2, \dots$, la formule (11) prouve que $E \epsilon f(F, F, F, \dots)$. Or, l'ensemble E de la famille $B(F)$ étant supposé arbitraire, on a

$$B(F) \subset f(F, F, F, \dots),$$

ce qui donne avec (5) l'égalité (1), q. f. d.

Zur Geometrisierung der abzählbaren Ordnungstypen.

Von

Stanisław Hartman (Warszawa).

1. Der vorliegende Beitrag steht in engem Zusammenhang mit der Arbeit von Herrn C. Kuratowski, *Sur la géométrisation des types d'ordre dénombrables* [1]). Es wurde dort die bekannte Lebesguesche Zerlegung der Cantorschen Menge angewendet, die erlaubt, jedem Punkte dieser Menge einen abzählbaren Ordnungstypus eindeutig zuzuordnen, wobei alle diesen Ordnungstypen ihre nicht leeren Urbilder besitzen.

Sei demnach

$$r_1, r_2, \dots r_k, \dots \tag{1}$$

eine Folge aller rationalen Zahlen und C das Cantorsche Diskontinuum. Der Zahl r_k werde die Menge W_{r_k} aller derjenigen Punkte von C zugeordnet, deren Abszissen an der k-ten Stelle ihrer tryadischen Bruchentwicklung die Ziffer 2 haben. Die Gesamtheit der so definierten (lauter in C abgeschlossenen und offenen) Mengen W_{r_k} bildet das sog. Lebesguesche *Sieb*. Indem wir mit t^k die k-te Ziffer der tryadischen Entwicklung der Zahl $t \epsilon C$ bezeichnen, haben wir die Äquivalenz $(t \epsilon W_{r_k}) \equiv (t^k = 2)$.

Wir setzen ferner $M_t = \underset{r}{E}[t \epsilon W_r]$. Der Ordnungstypus $\overline{M}_t$ (der Relation $>$ nach) der Menge M_t soll schlechthin mit $\bar{t}$ bezeichnet werden. Das ist eben die anfangs erwähnte Funktion, welche dem Punkte $t \epsilon C$ den Ordnungstypus $\bar{t}$ zuordnet. Jedem abzählbaren Typus τ entspricht als Urbild die Menge $\underset{t}{E}[\bar{t} = \tau]$. Einer Menge Φ

[1]) Fund. Math. **28**, S. 167—185.