Le théorème de M. Lusin comme une proposition de la Théorie générale des ensembles.

Par

W. Sierpiński (Warszawa).

Le but de cette Note est de démontrer (sans faire appel à l'hypothèse du continu) ce

Théorème [1]). *L'existence d'un ensemble* (linéaire) *de Lusin* (c. à d. d'un ensemble linéaire de puissance du continu ne contenant aucun sous-ensemble indénombrable non-dense) *équivaut à l'existence d'un corps dénombrable Φ d'ensembles* [2]) (formés d'éléments quelconques), *tel que*:

1^0 *il existe une famille F de puissance du continu d'ensembles de la famille Φ_δ* [3]) *deux à deux disjoints*,

2^0 *tout ensemble de la famille Φ_δ ne diffère que par un ensemble au plus dénombrable d'un ensemble de la famille Φ_σ* [4]) [5]).

[1]) C'est M. C. Kuratowski qui a démontré le premier (Fund. Math. **22**, p. 315—318) que la proposition selon laquelle il existe un ensemble de Lusin (proposition déduite de l'hypothèse du continu par N. Lusin en 1914, C. R. Paris **158**, p. 1259) équivaut à un énoncé de la Théorie générale des ensembles. L'équivalence à un autre énoncé de ce genre a été démontrée récemment par moi dans C. R. Soc. Sc. Varsovie **30** (1937,) p. 70.

[2]) Une famille d'ensembles est dite (d'après M. F. Hausdorff) un *corps d'ensembles*, si elle contient les ensembles E_1+E_2 et E_1-E_2 (donc aussi l'ensemble $E_1E_2=E_1-(E_1-E_2)$) dès qu'elle contient les ensembles E_1 et E_2.

[3]) Φ_σ (resp. Φ_δ) désigne la famille de tous les ensembles qui sont sommes (resp. produits) d'une infinité dénombrable d'ensembles de la famille Φ.

[4]) On voit ainsi que l'ensemble de Lusin joue un rôle essentiel dans certaines questions concernant l'existence des classes boreliennes d'ensembles abstraits. Or, j'ai utilisé déjà l'ensemble de Lusin, en résolvant un problème de ce genre, posé par M. A. Kolmogoroff (voir ma Note dans le Recueil Math. Moscou **1** (43), p. 303).

[5]) Il est facile de donner un exemple d'un corps de puissance $2^{\aleph_0}$ d'ensembles, jouissant des propriétés 1^0 et 2^0: p. ex. la famille Φ de tous les ensembles linéaires mesurables B constitue un tel corps.

Démonstration. I. L désignant un ensemble de Lusin formé de nombres irrationnels de l'intervalle $J=\langle 0,1\rangle$, soit Γ la famille de tous les ensembles linéaires qui sont des sommes d'un nombre fini de sous-intervalles de J à extrémités rationnelles (contenant ces extrémités ou non) et pouvant se réduire à un point (rationnel). On voit sans peine que la famille Γ est un corps dénombrable d'ensembles. La famille Φ de tous les ensembles de la forme EL, où $E\epsilon\Gamma$, est donc aussi un corps dénombrable d'ensembles et on constate aisément que tout ensemble formé d'un seul point (quelconque) de L appartient à la famille Φ_δ. La famille Φ jouit ainsi de la propriété 1^0.

De plus, les ensembles de la famille Γ étant évidemment mesurables B, tout ensemble E de la famille Φ_δ est de la forme

$$E=LM, \tag{1}$$

où M est un ensemble mesurable B contenu dans J. Les ensembles mesurables B jouissant comme on sait, de la propriété de Baire, on a

$$M=(G-K_1)+K_2, \tag{2}$$

où G est un ensemble ouvert et K_1 et K_2 sont des ensemble de I-e catégorie de Baire [1]). Or, l'ensemble G étant ouvert (et contenu dans J), on voit facilement que $G\epsilon\Gamma_\sigma$, d'où $LG\epsilon\Phi_\sigma$. D'après (1) et (2), on trouve

$$E=(LG-LK_1)+LK_2. \tag{3}$$

L étant un ensemble de Lusin et K_1 et K_2 étant des ensembles de I-e catégorie, les ensembles LK_1 et LK_2 sont au plus dénombrables. La formule (3) prouve donc que l'ensemble E ne diffère que par un ensemble au plus dénombrable d'un ensemble de la famille Φ_σ. La famille Φ jouit donc aussi de la propriété 2^0.

Ainsi l'existence d'un ensemble (linéaire) de Lusin entraîne celle d'un corps dénombrable Φ d'ensembles jouissant des propriétés 1^0 et 2^0.

II. Soit maintenant $\Phi=(E_1,E_2,E_3,...)$ un corps d'ensembles (formés d'éléments quelconques) dénombrable et jouissant des propriétés 1^0 et 2^0. Posons

$$S=E_1+E_2+E_3+... \tag{4}$$

[1]) Voir p. ex. C. Kuratowski, *Topologie I* (Monografie Matematyczne **3**, Warszawa—Lwów 1933), § 11.

et désignons, pour $n=1,2,3,\ldots$, par $f_n(p)$ la fonction caractéristique de l'ensemble E_n, c. à d. définie par les conditions:

$$(5) \qquad f_n(p)=\begin{cases} 1 & \text{pour} \quad p \in E_n \\ 0 & \text{pour} \quad p \in S-E_n. \end{cases}$$

Posons pour $p \in S$

$$(6) \qquad f(p)=\sum_{n=1}^{\infty} 2\cdot 3^{-n} f_n(p) \quad {}^{1)}.$$

En vertu de 1^0 et de l'axiome du choix, il existe un ensemble T contenant un seul élément de chacun des ensembles de la famille F et l'on a $\overline{\overline{T}}=\overline{\overline{F}}=2^{\aleph_0}$. Je vais montrer que

$$(7) \qquad f(p)_1 \neq f(p_2) \quad \text{pour} \quad p_1 \in T,\ p_2 \in T \ \text{et}\ p_1 \neq p_2.$$

En effet, si $p_1 \in T$ et $p_2 \in T$, il existe dans la famille F deux ensembles disjoints H_1 et H_2 tels que $p_1 \in H_1$ et $p_2 \in H_2$. Comme $H_1 \in F \subset \Phi_\delta$, il existe une suite infinie de nombres naturels $n_1, n_2, n_3, \ldots$, telle que $H_1 = E_{n_1} E_{n_2} E_{n_3} \ldots$. Comme $p_1 \in H_1$, on a $p_1 \in E_{n_k}$ pour $k=1,2,3,\ldots$. Or, si l'on avait aussi $p_2 \in E_{n_k}$ pour $k=1,2,3,\ldots$, on aurait $p_2 \in H_1$, ce qui est impossible, vu que $p_2 \in H_2$ et $H_1 H_2 = 0$.

Il existe donc un nombre naturel s pour lequel $p_1 \in E_{n_s}$ et $p_2 \operatorname{non} \in E_{n_s}$, d'où $f_{n_s}(p_1)=1$ et $f_{n_s}(p_2)=0$, donc, d'après (6), $f(p_1) \neq f(p_2)$. La formule (7) est ainsi établie.

La fonction $f(p)$ transforme par conséquent l'ensemble $T \subset S$ en l'ensemble $f(T)$ (dont les éléments sont des nombres réels) d'une façon biunivoque. Soit $\varphi(x)$ la fonction inverse de $f(p)$ (fonction qui transforme d'une façon biunivoque l'ensemble $f(T)$ en l'ensemble T). Soit N l'ensemble de tous les points de l'ensemble (linéaire) $f(T)$ qui sont des points de condensation de $f(T)$. Comme $\overline{\overline{T}}=2^{\aleph_0}$, on a $\overline{\overline{f(T)}}=2^{\aleph_0}$ et $\overline{\overline{N}}=2^{\aleph_0}$. Posons $K=\varphi(N)$.

Nous allons démontrer à présent deux lemmes.

Lemme 1. *Si Q est un sous-ensemble de N, ouvert dans N, il existe un ensemble E de la famille Φ_σ pour lequel $\varphi(Q)=KE$.*

Démonstration. Soit p_0 un élément de l'ensemble $\varphi(Q)$. On a donc $x_0=f(p_0) \in Q$ et, l'ensemble Q étant ouvert dans N, il existe un intervalle δ entourant x_0, tel que la formule $x \in \delta N$ entraîne $x \in Q$, donc $p=\varphi(x) \in \varphi(Q) \subset \varphi(N)=K \subset S$ et selon (6)

$$(8) \qquad x=\sum_{n=1}^{\infty} 2\cdot 3^{-n} f_n(p).$$

[1]) Cf. E. Szpilrajn, Fund. Math. **26**, p. 306. La fonction $f(p)$ s'appelle *fonction caractéristique* de la suite d'ensembles $E_1, E_2, E_3, \ldots$.

Or, on a d'après (6)

$$(9) \qquad x_0=f(p_0)=\sum_{n=1}^{\infty} 2\cdot 3^{-n} f_n(p_0).$$

L'intervalle δ entourant x_0, il résulte de (8) et (9) et des propriétés des fractions ternaires qu'il existe un nombre naturel k tel que, pour $p \in K$, les égalités

$$(10) \qquad f_n(p)=f_n(p_0) \quad \text{pour} \quad n=1,2,\ldots,k,$$

entraînent

$$(11) \qquad x \in \delta,$$

où x est le nombre défini par la formule (8).

Soient: $i_1, i_2, \ldots, i_r$ les nombres consécutifs de la suite $1,2,\ldots,k$ pour lesquels $f_i(p_0)=1$ et $j_1, j_2, \ldots, j_s$ ceux pour lesquels $f_j(p_0)=0$. On a donc $r+s=k$ et

$$(12) \qquad f_n(p_0)=\begin{cases} 1 & \text{pour} \quad n=i_1, i_2, \ldots, i_r \\ 0 & \text{pour} \quad n=j_1, j_2, \ldots, j_s. \end{cases}$$

La famille Φ étant un corps d'ensembles, l'ensemble

$$E_{i_1} E_{i_2} \ldots E_{i_r} - (E_{j_1} + E_{j_2} + \ldots + E_{j_s})$$

appartient à Φ et il existe un nombre naturel m tel que

$$(13) \qquad E_m = E_{i_1} E_{i_2} \ldots E_{i_r} - (E_{j_1} + E_{j_2} + \ldots + E_{j_s}).$$

On a d'après (12) et (5)

$$(14) \qquad p_0 \in E_m.$$

Soit maintenant p un élément quelconque de l'ensemble KE_m. On a donc d'après (13)

$$p\begin{cases} \in E_n & \text{pour} \quad n=i_1, i_2, \ldots, i_r \\ \operatorname{non} \in E_n & \text{pour} \quad n=j_1, j_2, \ldots, j_s, \end{cases}$$

d'où selon (5)

$$f_n(p)=\begin{cases} 1 & \text{pour} \quad n=i_1, i_2, \ldots, i_r \\ 0 & \text{pour} \quad n=j_1, j_2, \ldots, j_s. \end{cases}$$

On trouve donc, en vertu de (12), les égalités (10), qui entraînent la formule (11). On a ainsi

$$f(p) \in \delta \quad \text{pour} \quad p \in KE_m$$

et, comme $f(p) \epsilon f(K)=N$ pour $p \epsilon K$,

$$f(p) \epsilon \delta N \quad \text{pour} \quad p \epsilon KE_m,$$

d'où selon la définition de l'intervalle δ

$$f(p) \epsilon Q \quad \text{pour} \quad p \epsilon KE_m,$$

ce qui donne

$$f(KE_m) \subset Q.$$

Nous avons ainsi démontré qu'il existe, pour tout élément p_0 de l'ensemble $\varphi(Q)$, un ensemble E_m de la famille Φ tel que $f(KE_m) \subset Q$.

Soient $m_1, m_2, m_3, \dots$ tous les nombres naturels m, pour lesquels $f(KE_m) \subset Q$. On a donc:

(15) $$\varphi(Q) \subset KE_{m_1}+KE_{m_2}+KE_{m_3}+\dots,$$

(16) $$f(KE_{m_1})+f(KE_{m_2})+f(KE_{m_3})+\dots \subset Q.$$

D'autre part, d'après (16), on a évidemment

$$K(E_{m_1}+E_{m_2}+\dots)=\varphi f(KE_{m_1}+KE_{m_2}+\dots)=$$
$$=\varphi(f(KE_{m_1})+f(KE_{m_2})+\dots) \subset \varphi(Q)$$

et la formule (15) donne

$$\varphi(Q)=K(E_{m_1}+E_{m_2}+E_{m_3}+\dots).$$

En posant $E=E_{m_1}+E_{m_2}+\dots$, on a donc $E \epsilon \Phi_\sigma$ et $\varphi(Q)=KE$, ce qui achève la démonstration du lemme I.

Lemme 2. *Si $E \epsilon \Phi_\sigma$, l'ensemble $f(KE)$ est ouvert dans N.*

Démonstration. Si $E \epsilon \Phi_\sigma$, il existe une suite infinie de nombres naturels $m_1, m_2, m_3, \dots$, telle que

$$E=E_{m_1}+E_{m_2}+E_{m_3}+\dots,$$

d'où

$$f(KE)=f(KE_{m_1})+f(KE_{m_2})+\dots.$$

La somme d'une infinité dénombrable d'ensembles ouverts dans N étant toujours un ensemble ouvert dans N, il suffit de montrer que, pour tout m naturel, l'ensemble $f(KE_m)$ est ouvert dans N.

Soit $x_0 \epsilon f(KE_m)$. On a donc $p_0=\varphi(x_0) \epsilon KE_m$, d'où $f_m(p_0)=1$. D'après (6), (9) et les propriétés des fractions ternaires, il existe par conséquent un intervalle δ entourant x_0 et tel que, pour $x=f(p) \epsilon \delta N$, on a $f_m(p)=f_m(p_0)=1$, donc $p \epsilon KE_m$ et $x=f(p) \epsilon f(KE_m)$, ce qui prouve que l'ensemble $f(KE_m)$ est ouvert dans N. Le lemme II se trouve ainsi démontré.

Soit maintenant N_1 un sous-ensemble de N, non-dense dans N. Il existe donc un ensemble $N_2 \subset N$ ouvert dans N, dense dans N et tel que

(17) $$N_1 \subset N-N_2.$$

On a

(18) $$\varphi(N)=K=KS=KE_1+KE_2+KE_3+\dots$$

et, la fonction φ étant à valeurs distinctes dans N,

(19) $$\varphi(N-N_2)=\varphi(N)-\varphi(N_2).$$

Or, N_2 étant ouvert dans N, il existe d'après le lemme 1 un ensemble E de la famille Φ_σ, tel que $\varphi(N_2)=KE$. Comme $E \epsilon \Phi_\sigma$, il existe donc une suite infinie de nombres naturels $m_1, m_2, m_3, \dots$ telle que $E=E_{m_1}+E_{m_2}+\dots$, d'où

(20) $$\varphi(N_2)=K(E_{m_1}+E_{m_2}+\dots).$$

D'après (18), (19) et (20), on a donc

(21) $$\varphi(N-N_2)=K(E_1+E_2+E_3+\dots)-K(E_{m_1}+E_{m_2}+E_{m_3}+\dots)=$$
$$=K\sum_{i=1}^{\infty}(E_i-E_{m_1})(E_i-E_{m_2})(E_i-E_{m_3})\dots.$$

La famille Φ étant un corps d'ensembles, on conclut que $(E_i-E_{m_1})(E_i-E_{m_2})(E_i-E_{m_3})\dots \epsilon \Phi_\delta$ pour $i=1,2,3,\dots$. D'après la propriété 2^0, il existe donc une suite infinie $\{H_i\}$ $(i=1,2,3,\dots)$ d'ensembles de la famille Φ_σ et deux suites infinies $\{A_i\}$ et $\{B_i\}$ d'ensembles au plus dénombrables, telles que l'on a pour $i=1,2,3,\dots$

$$(E_i-E_{m_1})(E_i-E_{m_2})(E_i-E_{m_3})\dots=(H_i-A_i)+B_i,$$

donc d'après (21)

(22) $$\varphi(N-N_2)=K\sum_{i=1}^{\infty}(H_i-A_i)+K\sum_{i=1}^{\infty}B_i.$$

On vérifie sans peine l'identité

(23) $$\sum_{i=1}^{\infty}(H_i-A_i)=\Big(\sum_{i=1}^{\infty}H_i-\sum_{i=1}^{\infty}A_i\Big)+\sum_{i=1}^{\infty}(H_i-A_i)\cdot\sum_{j=1}^{\infty}A_j.$$

Posons:

$$\sum_{i=1}^{\infty} H_i = H, \qquad K\sum_{i=1}^{\infty} A_i = D_1,$$

$$K\sum_{i=1}^{\infty}(H_i - A_i)\cdot\sum_{j=1}^{\infty} A_j + K\sum_{i=1}^{\infty} B_i = D_2.$$

Comme $H_i \epsilon \Phi_\sigma$ pour $i=1,2,\ldots$, on a évidemment encore $H \epsilon \Phi_\sigma$, et les ensembles D_1 et D_2 sont au plus dénombrables (puisque les ensembles A_i et B_i le sont pour $i=1,2,\ldots$). D'après (22) et (23), on trouve

$$\varphi(N - N_2) = (KH - D_1) + D_2,$$

d'où, la fonction f (dont φ est la fonction inverse) étant à valeurs distinctes dans K,

$$(24) \qquad N - N_2 = f[\varphi(N-N_2)] = [f(KH) - f(D_1)] + f(D_2).$$

Comme $H \epsilon \Phi_\sigma$, l'ensemble $f(KH)$ est d'après le lemme 2 ouvert dans N. Or, les ensembles $f(D_1)$ et $f(D_2)$ sont au plus dénombrables, puisque les ensembles D_1 et D_2 le sont.

Je dis que l'ensemble $f(KH)$ est vide.

En effet, supposont que $f(KH) \neq 0$. L'ensemble $f(KH)$ étant ouvert dans N, il existerait donc un intervalle δ tel que $0 \neq \delta N \subset f(KH)$, d'où, d'après (24), $\delta N - f(D_1) \subset N - N_2$. Or, l'ensemble N étant condensé et $f(D_1)$ étant au plus dénombrable, l'ensemble $\delta N - f(D_1)$ est dense dans δN. D'autre part, l'ensemble N_2 étant ouvert dans N, donc aussi dans δN, il existe un intervalle $\delta_1 \subset \delta$ tel que $0 \neq \delta_1 N \subset N_2$. Comme $\delta N - f(D_1) \subset N - N_2$, on aurait donc $\delta_1[\delta N - f(D_1)] = 0$, ce qui est impossible, puisque l'ensemble $\delta N - f(D_1)$ est dense dans δN.

On a donc $f(KH) = 0$ et la formule (24) prouve que $N - N_2 = f(D_2)$. D'après (17), on a donc $N_1 \subset f(D_2)$, de sorte que l'ensemble N_1 est au plus dénombrable.

Nous avons ainsi établi que tout sous-ensemble de N qui est non-dense dans N est au plus dénombrable. Or, comme j'ai démontré avec M. Kuratowski[1]), il en résulte (sans l'hypothèse du continu) que l'ensemble N est homéomorphe à un ensemble (linéaire) L de Lusin.

L'existence d'un corps dénombrable d'ensembles Φ assujetti aux conditions 1° et 2° entraîne donc l'existence d'un ensemble de Lusin. Notre théorème est ainsi démontré.

[1]) C. Kuratowski et W. Sierpiński, Fund. Math. 26, p. 137, Th. I.

Quant à l'énoncé de ce théorème, il est à remarquer qu'on peut y ajouter aux conditions 1° et 2° la condition 3° suivante:

3° *Tout ensemble de la famille Φ_σ ne diffère que par un ensemble au plus dénombrable d'un ensemble de la famille Φ_δ* [1]).

Pour le démontrer, il suffit, comme on le conclut sans peine de notre théorème, de prouver que l'existence d'un ensemble linéaire de Lusin entraîne celle d'un corps dénombrable d'ensembles Φ assujetti aux conditions 1°, 2° et 3°. Or, je vais montrer que la famille Φ considérée dans la partie I de la démonstration de notre théorème constitue, en effet, un tel corps d'ensembles.

Cette famille Φ jouit, outre les propriétés 1° et 2°, de la propriété suivante:

(**P**) *Il existe un ensemble $L \epsilon \Phi$ tel que, pour tout ensemble E de la famille Φ, on a $E \subset L$ et $L - E \epsilon \Phi$.*

Or, on démontre sans peine que toute famille Φ d'ensembles jouissant des propriétés 2° et (**P**) jouit aussi de la propriété 3°.

En effet, si $E \epsilon \Phi_\sigma$, on a $E = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots$ où $E_n \epsilon \Phi$ pour $n=1,2,3,\ldots$. En vertu de (**P**), on a donc $L - E_n \epsilon \Phi$, d'où $L - E = (L-E_1)(L-E_2)(L-E_3)\ldots, \epsilon \Phi_\delta$; d'après la propriété 2°, on a par conséquent $L - E = (H - D_1) + D_2$, où $H \epsilon \Phi_\sigma$ et D_1 et D_2 sont des ensembles au plus dénombrables; ainsi $E = [(L-H) + D_1] - D_2$ où $L - H \epsilon \Phi_\delta$, car $H \epsilon \Phi_\sigma$.

Il est intéressant de remarquer qu'*en admettant l'hypothèse du continu, on peut établir l'existence d'un corps dénombrable Φ d'ensembles jouissant des propriétés* 1° *et* 2°, *mais ne jouissant pas de la propriété* 3°.

En effet, l'hypothèse du continu entraîne l'existence d'un ensemble de Lusin, donc (d'après notre théorème) d'un corps dénombrable Φ d'ensembles qui jouit des propriétés 1° et 2° et nous pouvons supposer que ce corps — que nous désignerons maintenant par Ψ — est formé d'ensembles de points de l'intervalle J.

Soient: Δ la famille de tous les intervalles $\langle 2n, 2n+1\rangle$ où $n=1,2,3,\ldots$ et Θ la famille de toutes les sommes d'un nombre fini d'intervalles de la famille Δ. On voit sans peine que la famille Φ de tous les ensembles de la forme $E+H$, où $E \epsilon \Psi$ et $H \epsilon \Theta$, est

[1]) C'est M. S. Saks qui m'a suggéré d'examiner aussi la condition 3°.

un corps dénombrable d'ensembles satisfaisant aux conditions 1⁰ et 2⁰. Or, la famille Φ ne jouit pas de la propriété 3⁰, puisque, comme on voit sans peine, la somme H_0 de tous les intervalles de la famille Δ appartient évidemment à la famille Φ_σ et, quel que soit l'ensemble E de la famille Φ_δ, l'ensemble H_0-E, en tant que contenant une infinité d'intervalles, est indénombrable.

D'autre part, comme l'a remarqué M. A. Tarski, on montre sans peine que *tout corps d'ensembles Φ qui jouit de la propriété* 3⁰ *jouit également de la propriété* 2⁰.

En effet, si $E \epsilon \Phi_\delta$, on a $E=E_1E_2\ldots$ où $E_n \epsilon \Phi$ pour $n=1,2,\ldots$. Φ étant un corps d'ensembles, on a donc $E_1-E_n \epsilon \Phi$ pour $n=1,2,\ldots$. et $E=E_1E_2E_3\ldots=E_1-[(E_1-E_2)+(E_1-E_3)+\ldots]=E_1-S$ où $S \epsilon \Phi_\sigma$. Selon la propriété 3⁰ de la famille Φ, on en conclut que $S=(H-D_1)+D_2$ où $H \epsilon \Phi_\delta$ et où D_1 et D_2 sont au plus dénombrables. On a donc $H=H_1H_2H_3\ldots$ où $H_n \epsilon \Phi$, donc aussi $E_1-H_n \epsilon \Phi$ pour $n=1,2,3,\ldots$, de sorte que

$$E=E_1-S=[(E_1-H)+E_1D_1]-D_2=$$
$$=[(E_1-H_1)+(E_1-H_2)+\ldots+E_1D_1]-D_2=(T+E_1D_1)-D_2$$

où $T \epsilon \Phi_\sigma$, c. q. f. d.

Quelques relations entre la situation des ensembles et la rétraction dans les espaces euclidiens.

Par

Karol Borsuk (Warszawa).

1. Soit A un sous-ensemble d'un espace M. Un ensemble $B \subset M-A$ sera dit *transverse à A dans M*, lorsque A est un rétracte de $M-B$.

Je me propose d'étudier dans ce travail quelques propriétés des ensembles transverses à un ensemble donné dans l'espace euclidien à n dimensions R_n ou — ce qui revient au même — dans la surface sphérique n-dimensionnelle S_n.

2. ***Exemple 1.*** Soit A un ensemble ne contenant que deux points a_1 et a_2 d'un espace M. Pour qu'un ensemble $B \subset M-A$ soit transverse à A dans M, il faut et il suffit que B divise M entre a_1 et a_2 [1]).

En effet, lorsqu'il existe une rétraction $r(x)$ de $M-B$ en A, les ensembles $C_i=r^{-1}(a_i)$ sont disjoints et fermés dans $M-B$ et leur somme est égale à $M-B$. D'autre part, lorsqu'il existe une décomposition de $M-B$ en deux ensembles C_1 et C_2 disjoints et fermés dans $M-B$, tels que $a_i \epsilon C_i$ où $i=1,2$, on obtient une rétraction $r(x)$ de $M-B$ en A, en posant $r(x)=a_i$ pour tout $x \epsilon C_i$.

3. ***Exemple 2.*** Soit A un sous-ensemble de S_n homéomorphe à S_{n-1}. Pour qu'un ensemble $B \subset S_n-A$ soit transverse à A dans S_n, il faut et il suffit que toute composante de S_n-A contienne au moins un point de B.

---

[1]) c. à d. que $M-B$ se laisse décomposer en deux ensembles C_1 et C_2 disjoints, fermés dans $M-B$ et tels que $a_1 \epsilon C_1$ et $a_2 \epsilon C_2$.